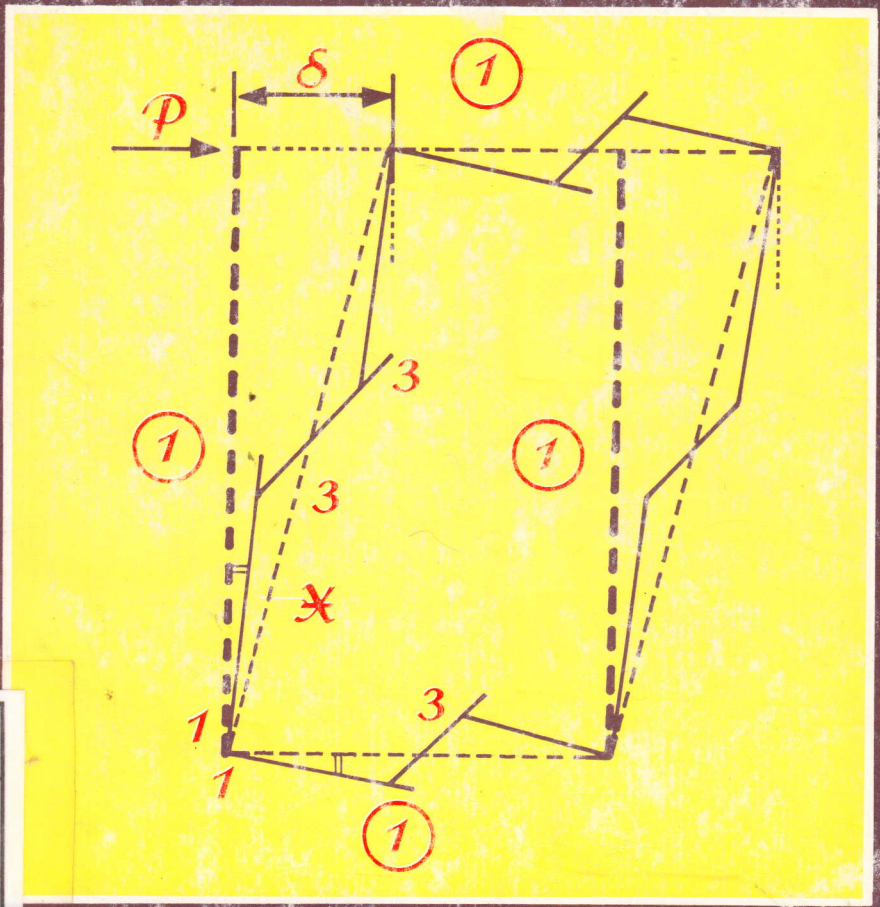
Metode Faktor Lenturan



N DAERAH
MUR

OLEH:
Prof. Dr. Ir. H. JOHANNES
Prof. Ir. ACHMAD ANTONO

Penerbit ANDI OFFSET Yogyakarta

METODE FAKTOR LENTURAN

Prof. Dr. Ir. H. Yohannes
Prof. Ir. Achmad Antono

Penerbit
ANDI OFFSET
Yogyakarta

METODE FAKTOR LENTURAN

*Oleh: **Prof. Dr. Ir. H. Yohannes***
Prof. Ir. Achmad Antono
Universitas Gadjah Mada
Yogyakarta

Proyek Pembinaan Perpustakaan
Jawa Timur
T. A. 1996/1997

Hak cipta © 1986, pada penulis.
Dilarang memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku ini dalam bentuk apa pun, tanpa izin tertulis dari penulis.

Edisi Pertama,
Cetakan Pertama, 1986

Penerbit :
ANDI OFFSET
Jl. Beo 38-39 Telp. 86881
Yogyakarta

MILIK
PERPUSTAKAAN DAERAH
JAWA TIMUR
Nomor : 114.910 (PDI) P 1997
Tanggal : 25/3 1997

Percetakan :
ANDI OFFSET
Jl. Beo 38-39 Telp. 86881
Yogyakarta

Pusat Penjualan :

1. *Percetakan & Penerbitan: ANDI OFFSET*
   Jl. Beo 38-39 Telp. 86881
   Yogyakarta
2. *Cabang ANDI OFFSET*
   Jl. Tawakal Raya 11 Telp. 596786
   Jakarta
3. *Cabang ANDI OFFSET*
   Jl. Bengawan 33[A] Telp. 78287
   Bandung
4. *Cabang ANDI OFFSET*
   Jl. Ceateul Tengah 19 Telp. 50483
   Bandung

Perpustakaan Daerah
Jawa Timur

KATA HANTAR

Buku ini diterbitkan dalam bahasa Inggris dalam tahun 1953, seperti yang tertulis dalam "preface". Untuk memudahkan bagi pembaca sekarang diterbitkan dalam bahasa Indonesia.

Materi yang disajikan meliputi bidang "statically indeterminate structures" dari mekanika-teknik. Cara penyelesaian dengan metode ini umumnya dengan hitungan sederhana, dengan pembuatan skets yang sederhana pula. Momen, garis-pengaruh, lendutan mudah diperoleh. Soal dengan simpangan-samping (pindahan ke samping) dapat dipecahkan secara langsung, tanpa menggunakan dua keadaan dengan lebih. berlainan dengan metode lain. Simpangannyapun mudah diperoleh. Tambahan pula hasilnya tepat (exakt).

Pengarang :

1. **Prof. Dr. Ir. H. Yohannes,**
2. **Prof. Ir. Achmad Antono.**

DAFTAR ISI

Kata Hantar iii

Daftar Isi v

BAB I : KONSTRUKSI DENGAN BAGIAN - BAGIAN BERTAMPANG LINTANG UNIFORM 1

1. Pendahuluan 1
2. Penjabaran persamaan-diferensial untuk geser, momen dan pelenturan 5
3. Faktor-Lenturan, Faktor-Momen 7
4. Berbagai bentuk segibanyak-batang-elastik dalam suatu bentangan 14
5. Analisa titik-titik-tetap dalam konstruksi-konstruksi statik-tak-tertentu 25
6. Analisa garis-garis-pengaruh 30
7. Analisa Momen 55
8. Analisa Lendutan 69
9. Contoh-contoh analisa berbagai konstruksi 75

BAB II : KONSTRUKSI DENGAN BATANG - BATANG BERTAMPANG TAK - UNIFORM 113

1. Kata Hantar 113
2. Klasifikasi Balok-balok 114
3. Konstante-balok dan konstante-beban 116
4. Penjabaran rumus-rumus untuk menetapkan luas-luas O_{a1}, O_{b1} dan O_p dan jarak-jarak-sentroidnya 121
5. Golongan-Utama H_I 124
6. Golongan-Utama H_{II} 131
7. Kolom dengan puncaknya kaku-tak-hingga 134
8. Contoh-contoh Sederhana 136
9. Kerangka-Tegar Multibentangan Dengan Batang-batang Bertampang Tak-Uniform 142

BAB I

KONSTRUKSI DENGAN BAGIAN-BAGIAN BERTAMPANG-LINTANG UNIFORM.

§ 1. Pendahuluan

Menurut hukum Hooke tegangan sebanding dengan regangan

atau : $\sigma = \epsilon.E$ ..... (1)

dengan σ = tegangan $= \frac{P}{F} = \frac{\text{gaya}}{\text{luas}}$,

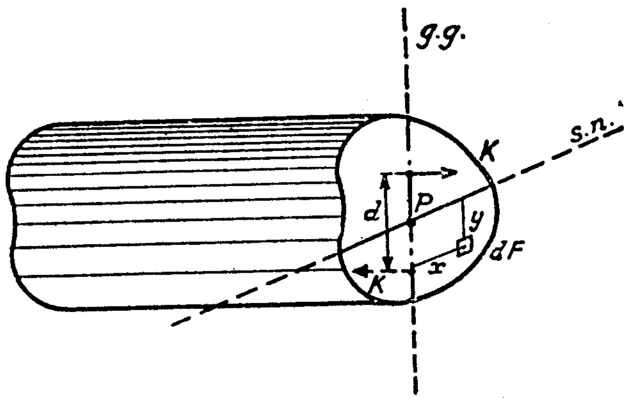
E = Konstante-perbandingan = modulus – elastik Young,

ϵ = regangan $= \frac{\triangle l}{l} = \frac{\text{deformasi} - \text{linier}}{\text{panjang}}$.

Menurut hukum Bernouilli suatu tampang-lintang-rata tetap rata pada lenturan. Maka regangannya di suatu titik (Gambar 1.1.1) sebanding dengan jaraknya hingga sumbu-netralnya dan menurut hukum Hooke hal ini berlaku pula untuk tegangannya.

Sumbu-netral dari suatu tampang-lintang merupakan sumbu-rotasi dari tampangnya, bila di rotasikan tanpa menimbulkan perubahan dari bentuk-ratanya.

Momen-lentur M ialah momen-kopel K. d, jika K resultante dari semua gaya-desak di atas sumbu-netralnya = resultante dari semua gaya-tarik di bawah sumbu-netralnya.

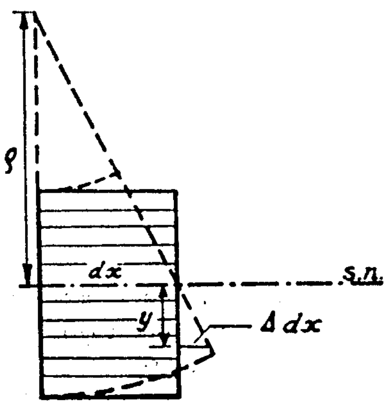


Gambar 1.1.1. Tampang-lintang dengan gaya-gaya K.

g. g = sumbu-gaya = garis-potong antara bidang-kopelnya dan tampang-lintangnya. Sumbu-netralnya melalui titikberat atau sentroid tampangnya. Hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut ini.

Dengan anggapan hanya ada lenturan, maka gaya-normal pada tampang-lintangnya sebesar nol, jadi

$$N = \int_0^F \sigma \,.\, dF = 0.$$



Gambar 1.1.2
Lenturan sepanjang dx.

ρ = R jari-jari kelengkungan.
Deformasi-linier pada jarak y dari sumbu-netralnya sebesar Δ x.
Pada Gambar 1.1.2. tampak, bahwa

$$\frac{\Delta\, dx}{dx} = \frac{y}{\rho}\text{, atau } \epsilon = \frac{y}{\rho}.$$

$$\text{Jadi } \sigma = \epsilon.E = \frac{y}{\rho}.\ E \ \ldots\ldots\ (2)$$

Dengan mengisikan nilai σ ini ke dalam $N = \int_0^F \sigma \,.\, dF$ dihasilkan

$$.N = \frac{E}{\rho}\int_0^F y \,.\, dF = 0.$$

Jadi $\int_0^F y \,.\, dF = 0$ dan ini berarti, bahwa sumbu-netralnya merupakan sumbu-gravitas dari tampang-lintangnya.

Momen dari semua gaya-desak dan gaya-tarik terhadap sumbu-gayanya (g.g. pada Gb.1.1.1) sebesar nol dan terhadap sumbu-netralnya (s.n. pada Gb.1.1.1) ialah momen-lenturnya M.

Jika jarak dari dF hingga sumbu-netralnya sebesar y dan hingga sumbu-gaya g.g sebesar x, maka $\frac{E}{\rho}\int_0^F x.y.\ dF = 0$, jadi $C_{xy} = \int_0^F x.y.\ dF = 0.$

Telah diketahui, bahwa, jika hasilkali-lembam ("product of inertia") $C_{xy} = \int_0^F x.y.\ dF$ dari suatu tampang sebesar nol, kedua sumbu--referensi merupakan garistengah-garistengah sekawan dalam elips-lembam ("ellips of inertia"). Maka sumbu-gaya untuk lenturan dan sumbu-netralnya merupakan garistengah-sekawan dalam elips-lembam-pusatnya.

Momen terhadap sumbu-netralnya = momen-lenturnya, maka

$$M_x = \int_0^F \sigma.y.dF = \frac{E}{\rho}\int_0^F y^2 \ \ dF,$$

$$M_x = \frac{E.I}{\rho} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3).$$

dengan I = momen-lembam dari tampang-lintangnya.
Dalam matematika telah dibuktikan :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(4a)}$$

dengan $\frac{1}{\rho}$ = kelengkungan di titik tertentu kurvenya,

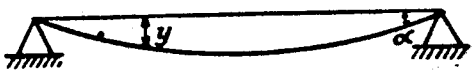
ρ = jari-jari-kelengkungan.

Lendutan ("deflection") suatu konstruksi harus selalu kecil, maka lereng q dari kurve-elastiknya kecil dan

$\frac{dy}{dx}$ = tg α dapat diabaikan dalam rumus (4a) sehingga memberikan :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(4b)}$$

Dengan pengisian $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$



dalam (3) diperoleh :

$$M_x = EI \cdot \frac{1}{\rho} = EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x}{EI} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(5a)}$$

Gambar 1.1.3. Garis-Lendutan.

Dalam penjabaran rumus (4) arah-positif dari sumbu-y dianggap berarah ke atas. Mengenai kurve-elastiknya biasanya arah-positif dari sumbu-y-nya dipilih berarah ke bawah, sehingga tanda-minus harus ditambahkan pada rumus (5a), yang memberikan :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(5b)}$$

Menurut rumus (3) $\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI}$. Pengisian nilai ini dalam rumus (2)

$\sigma = \frac{E \cdot y}{\rho}$ memberikan :

$$\sigma = \frac{M_x \cdot y}{I} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(6a)}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_x \cdot y_{max}}{I} = \frac{M_x}{W} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(6b)}$$

dengan $W = \frac{I}{y_{max}}$ = momen-tahan untuk lenturan,

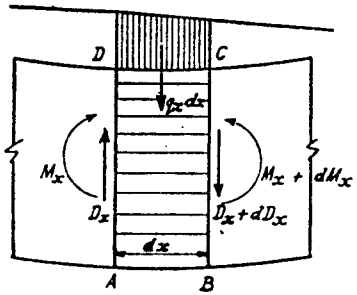
I = momen-lembam terhadap sumbu-netralnya,

y_{max} = jarak dari serat-tampang yang paling jauh ke sumbu-netralnya.

Ada dua nilai untuk y_{max}, satu untuk desak dan satu untuk tarik. Bila sumbu-gayanya berimpit dengan salah satu sumbu-utama dari elips-lembam-pusatnya, maka sumbu-netralnya akan berimpit dengan sumbu-utama yang lainnya.

Dengan menamakan tegangan-izin t, maka momen-lentur yang dapat didukung M = W.t. Momen ini harus melebihi momen (–extern) – sebenarnya di titik yang bersangkutan.

§ 2. **Penjabaran persamaan-diferensial untuk geser, momen dan pelenturan.**



Gb. 1.2.1 Lajur-elemen dx.

Pada Gb. 1.2.1 ABCD melukiskan sebuah lajur-elementer dari sebuah balok, yang mendapat beban-terbagi-rata q_x. Gaya-gaya dan momen-momen, yang bekerja pada lajurnya yang disebabkan

oleh bebannya, terlukis pada gambarnya. Gaya-gaya dan momen-momen ini dalam keseimbangan. Syarat keseimbangan terhadap titik A memberikan :

$$M_x + q_x.dx.\ \tfrac{1}{2}\,dx + (D_x + d\,D_x)\,dx \quad = M_x + d\,M_x$$

$$d\,M_x = \quad D_x\,.\,dx + d\,D_x.dx + \tfrac{1}{2}\,q_x\,(dx)^2.$$

Suku-suku $dD_x.dx$ dan $\tfrac{1}{2}\,q_x\,(dx)^2$ merupakan kuantitas-kuantitas kecil-tak-hingga dari derajat lebih tinggi dibanding dengan $D_x.dx$ dan $d\,M_x$ dan dapat diabaikan terhadap $D_x.dx$ dan $d\,M_x$.

Jadi : $\quad d\,M_x \quad = D_x.dx,$

$$D_x \quad = \frac{d\,M_x}{dx}\ , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7a)$$

dan dalam hubungan dengan persamaan (5b) :

$$D_x \quad = -\,EI\,.\,\frac{d^3\,y}{dx^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7b)$$

Syarat keseimbangan-vertikal menghasilkan :

$$D_x - q_x.dx - (D_x + d\,D_x) = 0$$

atau $\quad d\,D_x = -\,q_x\,dx\,,$

$$q_x \quad = -\frac{D_x}{dx} \quad = -\frac{d^2\,M_x}{dx^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8a)$$

dan dalam hubungan dengan persamaan (7b) :

$$q_x = EI\,.\,\frac{d^4\,y}{dx^4}\ , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8b)$$

atau $\quad \dfrac{d^4\,y}{dx^4} = \dfrac{q_x}{EI} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8c)$

§ 3. Faktor-lenturan, faktor-momen.

Seperti telah diketahui dalam grafostatika momen-lentur M_x diperoleh dengan penggambaran segibanyak-batang untuk beban q_x. Guna kelengkapan buktinya diberikan di bawah ini.

Sebuah balok (Gambar 1.3.1) mendapat beban K_{12}, K_{23} dan K_{34}. Dengan pertolongan diagram-kutub (Gambar 1.3.1.b) sebuah segibanyak-batang dilukis. Maka momen di titik C :

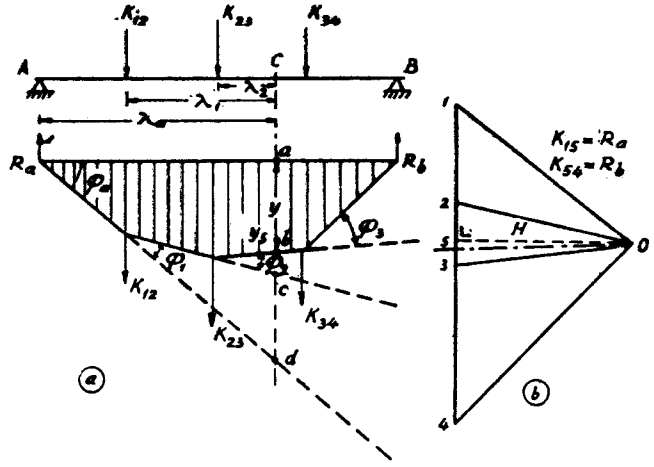
$$M_c \quad = R_a\,.\,\lambda_a - K_{12}\,.\,\lambda_1 - K_{23}\,.\,\lambda_2$$

$$\Delta\,R_a\,.\,ad \sim \Delta\,105, \quad \frac{ad}{\lambda_a} = \frac{K_{15}}{H}$$

$$\frac{\overline{ad}}{\lambda_a} = \frac{R_a}{H} \longrightarrow R_a\,.\,\lambda_a = H\,.\,\overline{ad}$$

$$\Delta\,K_{12}\,.\,cd \sim \Delta\,201 \longrightarrow K_{12}\,.\,\lambda_1 = H\,.\,\overline{cd}$$

$$\Delta\,K_{23}\,.\,bc \sim \Delta\,302 \longrightarrow K_{23}\,.\,\lambda_2 = H\,.\,\overline{bc}$$



Gambar 1.3.1. a) Segibanyak-batang
b) Diagram-kutub.

Maka : $M_c = H(\bar{ad} - \bar{cd} - \bar{bc})$.

$M_c = H \cdot y$.

Jadi ordinat dari segibanyak-batang merupakan ukuran untuk momen-lenturnya.

Momen-lentur = ordinat poligon-batang kali jarak-kutub H.

Dari hubungan $K_{12} \cdot \lambda_1 = H \cdot \bar{cd}$ diperoleh :

$$K_{12} = H \cdot \frac{\bar{cd}}{\lambda_1}$$

$$K_{12} = H \cdot \text{ort } \varphi_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

dengan ort $\varphi_1 = \frac{\bar{cd}}{\lambda_1}$ = nilai-ortogonal sudut φ_1.

Nilai-ortogonal suatu sudut diperbataskan sebagai nilai-banding antara panjang potong-garis dari sebuah garis-vertikal, terpotong oleh kedua sisi-sudutnya, dan jarak-horisontal dari titik-sudutnya hingga garis-vertikalnya.

Bila bebannya merupakan beban-terbagi-rata q_X tiap satuan-panjang, maka baloknya dibagi-bagi dalam lajur-lajur dx dan segibanyak-batangnya dilukis untuk beban-beban $K_X = q_X \cdot dx$. Dalam hal limit, bila dx mendekati nol, segibanyak-batangnya menjadi kurve-kontinu dengan ordinat-ordinatnya merupakan ukuran untuk momen-lenturnya.

Karena $q_X = -\frac{d^2 M_X}{dx^2}$, penggambaran kurve-gayanya ekuivalen dengan pengintegrasian dua kali.

Telah dibuktikan $\frac{M_X}{EI} = -\frac{d^2 y}{dx^2}$ (5b). Persamaan ini serupa dengan persamaan $q_X = -\frac{d^2 M_X}{dx^2}$. Maka kurve-elastiknya dapat dilukis, bila $\frac{M_X}{EI}$ dianggap sebagai beban (dinamakan "beban-

kedua"). Gaya-geser, yang disebabkan oleh beban kedua ini, menggambarkan lerengnya dan momen, yang disebabkan oleh beban-kedua, menggambarkan ordinat y dari kurve-elastiknya. Untuk menentukan kurve-elastiknya dengan grafik diagram-momen M_X dibagi oleh faktor-kaku terhadap lenturan EI; kemudian diagram-momen-reduksian $\frac{M_X}{EI}$ dibagi dalam lajur-lajur (atau bagian-bagian berbentuk lain) dan segibanyak-batang untuk beban-kedua ini dilukis. Segibanyak-batangnya dinamakan segibanyak-batang-elastik.

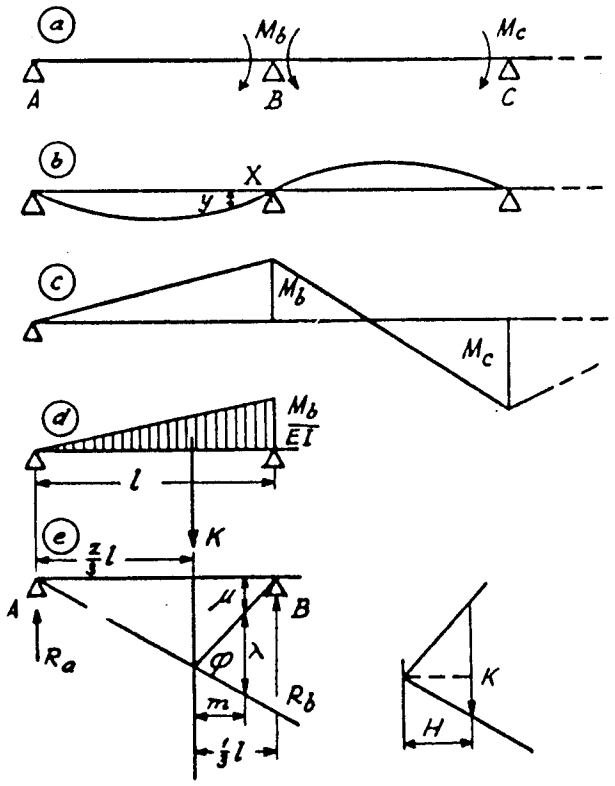
Bila diagram-momen-reduksian tidak dibagi dalam lajur-lajur yang agak besar, tetapi dalam bagian-bagian kecil-tak-hingga, maka segibanyak-batang-elastik menjadi kurve-batang-elastik, yang identik dengan kurve-elastik dari konstruksinya.

Sudut-sudut antara garis-garis-batang dari segibanyak-batang dinamakan sudut-sudut-lenturan. Besar sudut-sudut-lenturan, yang diukur dengan nilai-nilai-ortogonalnya, menggambarkan gaya-beban-kedua yang melalui titiksudutnya dan yang sama dengan bagian yang sesuai dari diagram-momen-reduksiannya.

Nilai-ortogonal sebenarnya dari suatu sudut-lenturan α tidak perlu diketahui selama proses-hitungannya. Cukup diketahui nilai-relatifnya, yang ditunjukkan dengan suatu bilangan, yang dinamakan faktor-lenturan.

Misalkan ABC (Gambar 1.3.2) bagian-kiri dari suatu balok-terusan dan dianggap, bahwa oleh suatu sebab terjadi momen di B dan C. Kurve-elastik, diagram-momen, diagram-momen-reduksian dan segibanyak-batang seperti yang terlukis dalam gambarnya. Sumbu-sumbu-balok yang tak-terlentur menggambarkan garis-tutup dari segibanyak-batang-elastiknya. Garis-garis-batang melalui titik-titik-simpul A dan B merupakan garis-garis-singgung pada kurve-elastiknya di titik-titik itu. Sudut φ antara kedua garis-singgung ini menggambarkan luas dari diagram-momen-reduksian antara kedua titik-singgungnya. Luas ini merupakan beban-kedua-resultante =

$$K = \frac{M}{EI} \cdot \frac{l}{2} = M \cdot \frac{l}{2EI} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$



a. Balok terusan dengan momen-momen di perletakan B dan C.
b. Garis-lendutan.
c. Diagram-momen.
d. Diagram-momen-reduksian/beban-kedua.
e. Segibanyak-batang-elastik.
f. Diagram-kutub.

Gambar 1.3.2.

Lendutan y di titik x = momen beban-kedua = μ . H = $(\frac{2}{3}l + m)$. R_a – m . K .

Penggabungan dengan $(\frac{2}{3}l + m)$. R_a = (x + μ). H memberikan

$$\lambda H = mK$$

$$K = \frac{\lambda}{m} . H = ort.\phi . H .$$

Maka dapat ditulis : K = c . α ,

bila α = nilai-ortogonal-relatif dari sudut ϕ
= faktor-lenturan sudut ϕ,
dan c = suatu konstante.

Dari (10) : $M = K . \frac{2EI}{l}$,

dan dikombinasi dengan (11) :

$$M = c . \frac{2EI}{l} . \alpha$$

$$M = c . k . \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12a)$$

$k = \frac{2EI}{l}$ dinamakan kekakuan baloknya dan dapat diperbatas-kan sebagai nilai-banding antara momen-ujung dan luas diagram-momen-reduksian = $\frac{M}{K} = \frac{M}{M\frac{l}{2EI}} = \frac{2EI}{l}$.

Dapat juga diperbataskan sebagai nilai-kebalikan dari luas diagram-momen-reduksian untuk momen-ujung M = 1.

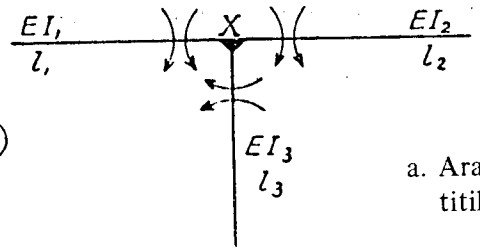
Titik-titik-potong dari garis-garis-batang di sentroid-sentroid dari bagian-bagian yang bersangkutan dari diagram-momen-reduksian. Untuk bagian-bagian-konstruksi, yang tidak dibebani, dengan tampang-lintang-tetap, titik-titik-potong ini di titik-titik-sepertiga dari bagian-bagian-konstruksinya dengan diagram-diagram-momen-reduksian dibagi dalam bagian-bagian-segitiga.

Syarat-syarat di titik-titik-simpul yang harus diadakan ialah, bahwa :

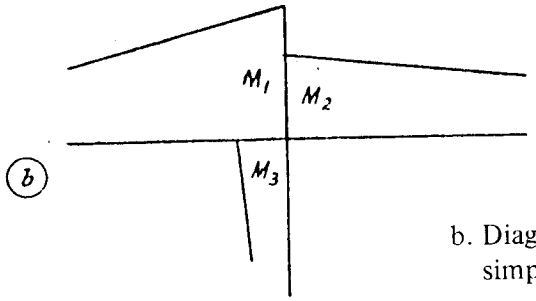
a. semua sudut-rotasi dari bagian-bagian-konstruksi, yang bertemu di titik-simpul, sama besar,
b. momen-momen sekitar suatu titik-simpul harus berimbangan untuk keseimbangan.

Syarat selanjutnya ialah, bahwa gaya-geser pada suatu bagian-konstruksi harus sama dengan momen-momen-ujung gabungan dibagi oleh panjangnya.

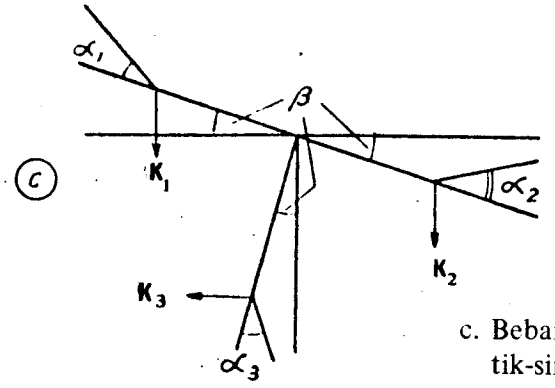
Untuk memenuhi syarat (b), maka: $M_1 = M_2 + M_3$.
(arah puntir sekitar titik-simpulnya ditunjukkan oleh anak-panah di titik-titik-potongnya dalam Gambar 1.3.3.c). Dari rumus (12a) :
$M_1 = c. \frac{2EI_1}{l_1} \cdot \alpha_2$, $M_2 = c. \frac{2EI_2}{l_2} \cdot \alpha_2$ dan $M_3 = c. \frac{2EI_3}{l_3} \cdot \alpha_3$.



a. Arah momen-momen sekitar titik-simpul.



b. Diagram-momen di titik-titik-simpul.



c. Beban-beban-kedua sekitar titik-simpul.

Gambar 1.3.3.

Dengan mengisikannya dalam $M_1 = M_2 + M_3$:

$$c \cdot \frac{2\,EI_1}{l_1} \cdot \alpha_1 = c \cdot \frac{2\,EI_2}{l_2} \cdot \alpha_2 + c \cdot \frac{2\,EI_3}{l_3} \cdot \alpha_3$$

$$c \cdot k_1 \cdot \alpha_1 = c \cdot k_2 \cdot \alpha_2 + c \cdot k_3 \cdot \alpha_3 .$$

Persamaan ini dapat juga ditulis sebagai :
$c' \cdot k_1' \cdot \alpha_1 = c' \cdot k_2' \cdot \alpha_2 + c' \cdot k_3' \cdot \alpha_3$. dengan k_1', k_2' dan k_3' nilai-banding-kekakuan dari balok-baloknya, yang harus ditentukan dari :

$$k_1' : k_2' : k_3' = k_1 : k_2 : k_3 = \frac{2\,EI_1}{l_1} : \frac{2EI_2}{l_2} : \frac{2\,EI_3}{l_3} =$$

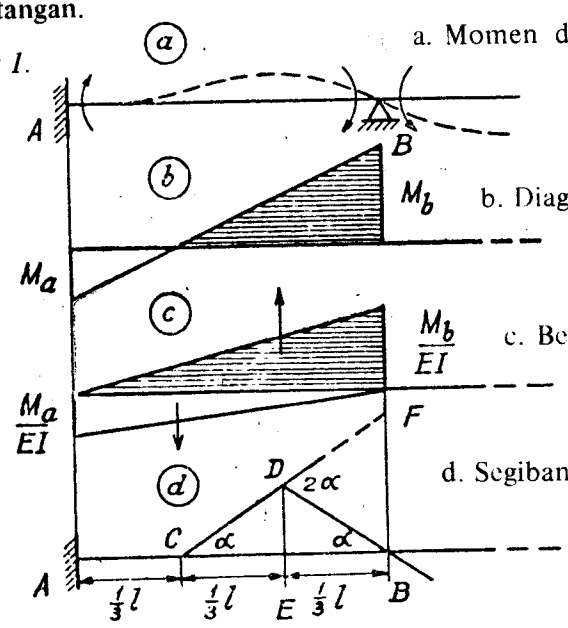
$$= \frac{I_1}{l_1} : \frac{I_2}{l_2} : \frac{I_3}{l_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

$k' \cdot \alpha$ = nilai-banding-kekakuan kali nilai-ortogonal-relatif dari sudut-lenturan atau nilai-banding-kekakuan kali faktor-lenturan dinamakan *faktor-momen.*

Bila konstante-sebanding c' telah ditetapkan, maka momen-momen harus dihitung, yaitu sebesar c' kali faktor-momennya.

§ 4. **Berbagai bentuk segibanyak-batang-elastik dalam suatu bentangan.**

Kasus 1.



a. Momen dan garis-lendutan.

b. Diagram-momen.

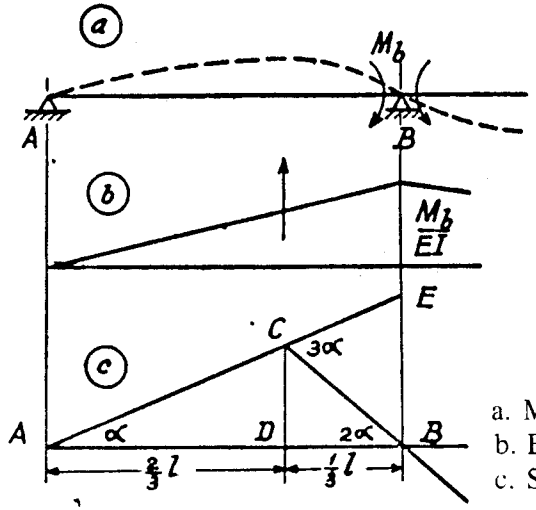
c. Beban-kedua.

d. Segibanyak-batang-elastik.

Gambar 1.4.1.

(1) Misalkan AB bentangan paling-kiri dari suatu balok-terusan. Ujung A terjepit-sempurna. Baloknya dikenakan pada momen-momen seperti diperlihatkan dalam Gambar 1.4.1.a. Diagram-momen, diagram-momen-ekuivalen dan segibanyak-batang-elastik kemudian dilukis. Karena jepitan-sempurna di A, maka sudut-lereng di A sebesar nol. Segitiga CDB samakaki, karena CE = EB = 1/3 *l*. Dengan memberikan nilai-ortogonal atau faktor-lenturan α pada sudut C, maka sudut B = sudut C = α dan sudut D = 2α. Dapat dicatat, bahwa sudut C mewakili momen M_a dan sudut D mewakili momen M_b, jadi : $M_a = \frac{1}{2} M_b$.

Kasus 2.



a. Momen dan garis-lendutan.
b. Beban-kedua.
c. Segibanyak-batang-elastik.

Gambar 1.4.2.

(2) Balok dari kasus tadi (Gambar 1.4.1.) dianggap tidak terjepit, tetapi bersendi di A. Diagram-momen dan segibanyak-batang-elastik dilukis di Gambar 1.4.2. Dengan memberikan faktor-lenturan α pada sudut A, maka faktor-lenturan dari sudut-sudut lain dapat dihitung sebagai berikut :

$$\angle B = \frac{CD}{1/3\,l} = \frac{\alpha \,.\, 2/3\,l}{1/3\,l} = 2\alpha ,$$

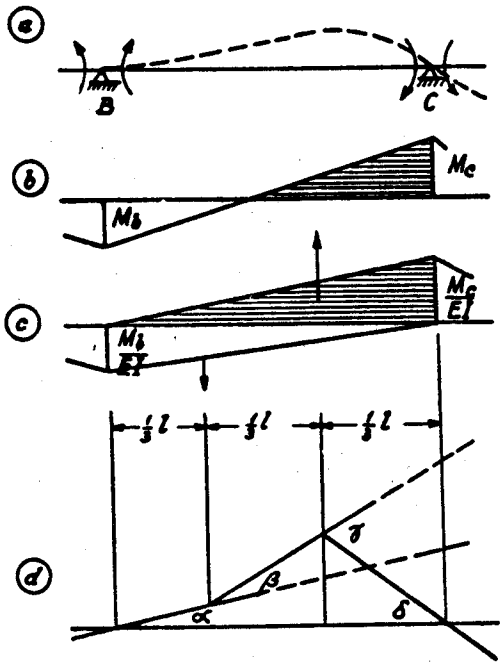
$$\angle C = \frac{BE}{1/3\,l} = \frac{\alpha \,.\, l}{1/3\,l} = 3\alpha ,$$

atau lebih mudah : $\angle C$ merupakan sudut-luar di C dari Δ ABC, jadi $\angle C = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$.

Bila 1/3 l digunakan sebagai satuan, maka hitungannya menjadi lebih pendek sebagai berikut :

$$\alpha \,.\, 2 = \angle B \,.\, 1 ,$$
$$\angle B = 2\alpha .$$

Kasus 3.



a. Momen dan garis-lendutan.
b. Diagram-momen.
c. Beban-kedua.
d. Segibanyak-batang-elastik.

Gambar 1.4.3.

(3) Misalkan BC (Gambar 1.4.3) mewakili suatu bentangan-tengah dari suatu konstruksi-terusan. Bentangannya tak-dibebani dan dikenakan hanya pada momen-momen-ujung M_b dan M_c; diminta untuk mendapatkan hubungan-hubungan antara faktor-faktor-lenturan α, β, γ dan δ.

Dalam kasus dari Gambar 1.4.3. diperoleh :

$$\gamma \,.\, 1/3\, l = \alpha \,.\, l + \beta \,.\, 2/3\, l$$

$$\gamma = 3\alpha + 2\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

dan $$\delta \,.\, 1/3\, l = \alpha \,.\, 2/3\, l + \beta \,.\, 1/3\, l \,.$$

$$\delta = 2\alpha + \beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

Pengurangan (II) dari (I) menghasilkan :

$$\gamma - \delta = \alpha + \beta.$$

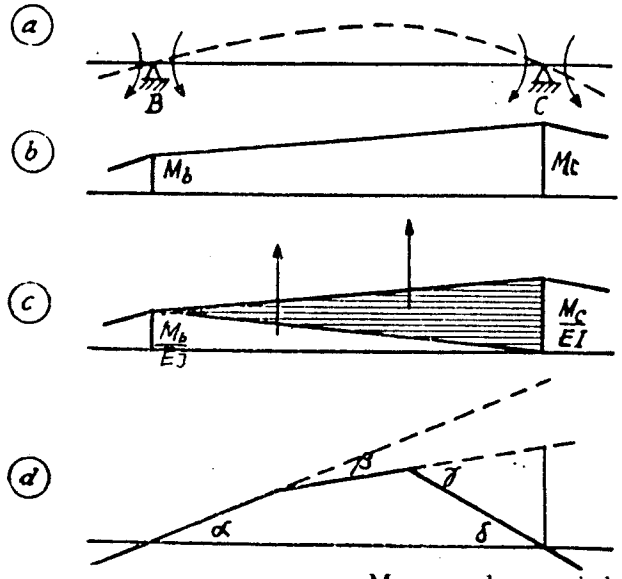
atau $\gamma = \alpha + \beta + \delta$, yang dapat digunakan untuk kontrol.

Bila α dan δ diketahui, β dan γ harus dihitung dari :

$$\beta = \delta - 2\alpha,$$

dan $$\gamma = 3\alpha + 2\beta = -\alpha + 2\delta \,.$$

Kasus 4.



a. Momen dan garis-lendutan.
b. Diagram-momen.
c. Beban-kedua.
d. Segibanyak-batang-elastik.

Gambar 1.4.4.

(4) Dalam kasus dari Gambar 1.4.4., terdapat hubungan-hubungan:

$$\gamma = 3\alpha - 2\beta,$$

$$\delta = 2\alpha - \beta,$$

$$\gamma - \delta = \alpha - \beta. \quad -$$

Untuk kontrol: $\alpha + \delta = \beta + \gamma$.

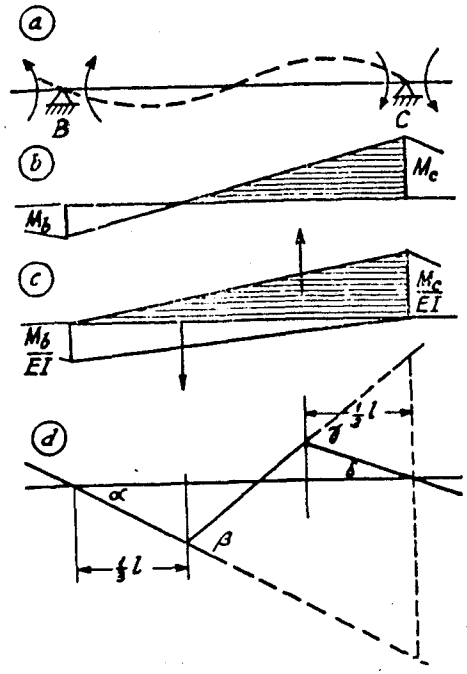
Proyek Pembinaan Perpustakaan
Jawa Timur 17
T.A. 1996/1997

Dengan mengetahui α dan δ maka β dan γ dihitung dari :

$$\beta = 2\alpha - \delta$$

dan $\gamma = 3\alpha - 2\beta = -\alpha + 2\delta$.

Kasus 5.



a. Momen dan garis-lendutan.
b. Diagram-momen.
c. Beban-kedua.
d. Segibanyak-batang-elastik.

Gambar 1.4.5.

(5) Dalam kasus dari Gambar 1.4.5.

$$\gamma = -3\alpha + 2\beta.$$
$$\delta = -2\alpha + \beta.$$
$$\gamma - \delta = -\alpha + \beta.$$

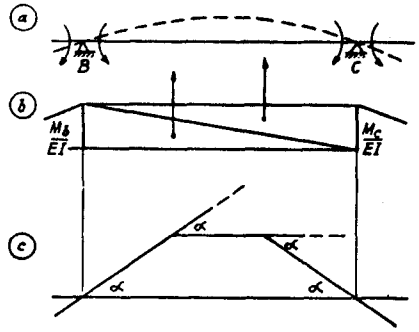
Untuk kontrol : $\alpha + \gamma = \beta + \delta$.

Dengan mengetahui α dan δ maka β dan γ dihitung dari :

$$\beta = 2\alpha + \delta$$

dan $\gamma = -3\alpha + 2\beta = 2\alpha + 2\delta$.

Kasus 6.

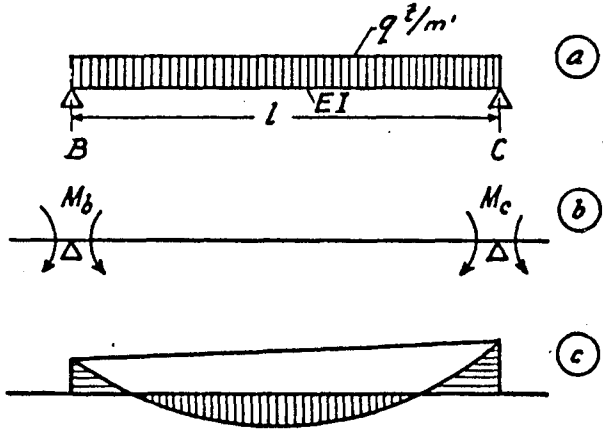


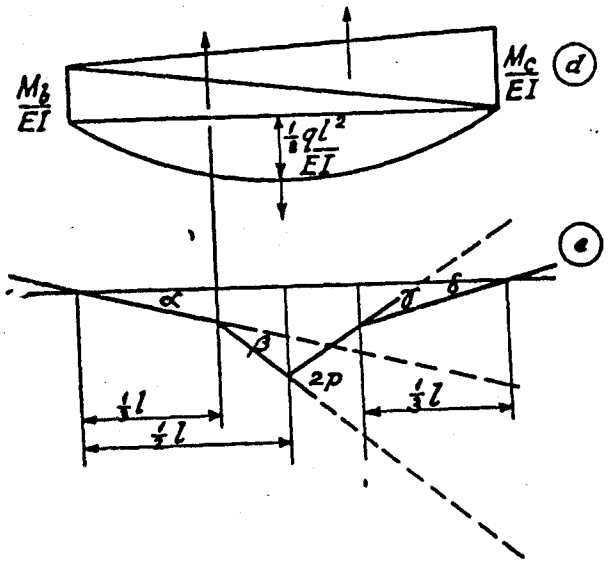
a. Momen sama besar dan garis-lendutan.
b. Beban-kedua.
c. Segibanyak-batang-elastik.

Gambar 1.4.6.

(6) Gambar 1.4.6. melukiskan kasusnya bila $M_b = M_c$. Segibanyak-batang-elastiknya simetrik dan $\alpha = \beta = \gamma = \delta$.

Kasus 7.





a. Beban-terbagi-rata.
b. Momen-momen.
c. Beban-kedua.
d. Segibanyak-batang-elastik.

Gambar 1.4.7.

(7) Misalkan bentangan-antara Gambar 1.4.7. memuat suatu beban-terbagi-rata q t/m. Dengan menggunakan 1/3 l sebagai suatu satuan hitungannya berlangsung seperti berikut :

$$\alpha \,.\, 3 + \beta \,.\, 2 + \gamma \,.\, 1 = 2p \,.\, 1\tfrac{1}{2}.$$
$$3 \,.\, \alpha + 2\beta + \gamma = 3p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

$$\alpha \,.\, 2 + \beta \,.\, 1 - 2p \,.\, \tfrac{1}{2} = \delta \,.\, 1.$$
$$2\alpha + \beta - p = \delta$$
$$2\alpha + \beta - \delta = p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

Dengan mengurangkan (II) dari I dihasilkan :

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2p,$$

yang dapat digunakan untuk kontrol. Dengan mengetahui α dan δ

maka dari (II) dan (I) atau dari Gambar 1.4.7e. diperoleh :

$$\beta = p + \delta - 2\alpha = 3\delta + \gamma - 3\alpha$$

dan

$$\gamma = p + \alpha - 2\delta = 3\alpha + \beta - 3\delta$$

Luas dari diagram-momen-reduksian, disebabkan oleh beban-terbagi-rata saja, ialah :

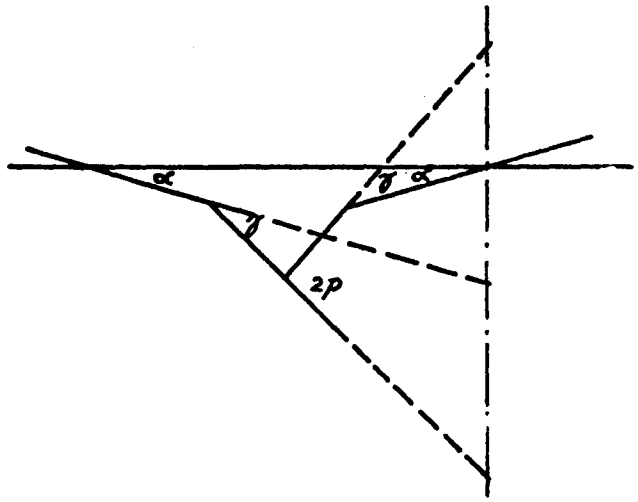
$$F = \frac{2}{3}\, l \,.\, \frac{1}{8}\, ql^2 \,.\, \frac{l}{EI} = \frac{ql^3}{12\ EI}$$

Ini ditunjukkan oleh faktor-lenturan $2p$. Faktor-momennya $2p$. k′ sesuai dengannya.

$$\frac{ql^3}{EI} \,.\, \frac{2\ EI}{l} = \frac{1}{6}\, ql^2 .$$

Jadi $\boxed{[\ 2p \,.\, k'\ ] = \frac{1}{6}\, ql^2}$ ..... (14)

Kasus 8.

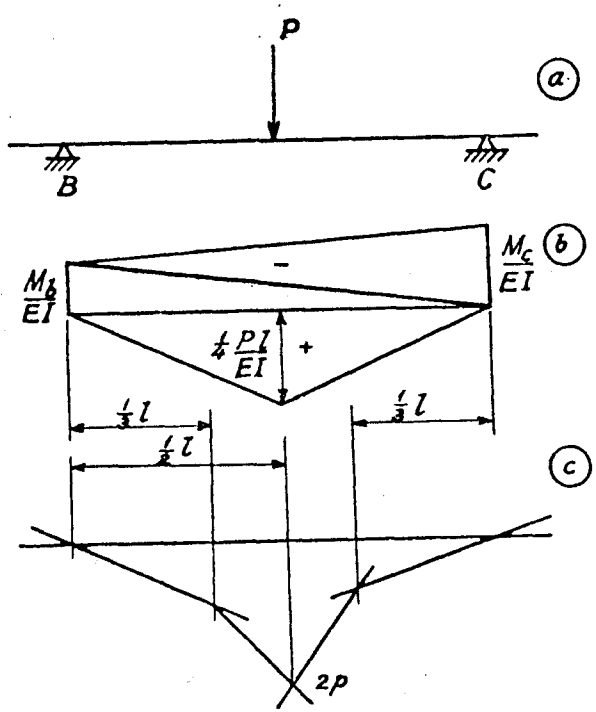


Gambar 1.4.8. Segibanyak-batang-elastik.

(8) Jika dalam kasus yang baru lalu $M_b = M_c$ (Gambar 1.4.8), maka :

$$\alpha = \delta \ , \ \beta = \gamma \text{ dan } \gamma = p \quad \alpha.$$

Kasus 9.



a. Beban-terpusat di tengah.
b. Beban-kedua.
c. Segibanyak-batang-elastik.

Gambar 1.4.9.

(9) Jika suatu bentangan-antara memuat suatu beban-terpusat P (Gambar 1.4.9), maka hubungan yang sama berlaku antara faktor-faktor-lenturannya seperti yang dijabarkan dalam kasus 7 dan kasus 8. Luas dari diagram-momen-reduksian :

$$F = \tfrac{1}{2}\, l \,.\, \tfrac{1}{4}\, P\, l \,.\, \frac{l}{EI} = \frac{P\, l^2}{8\ EI}$$

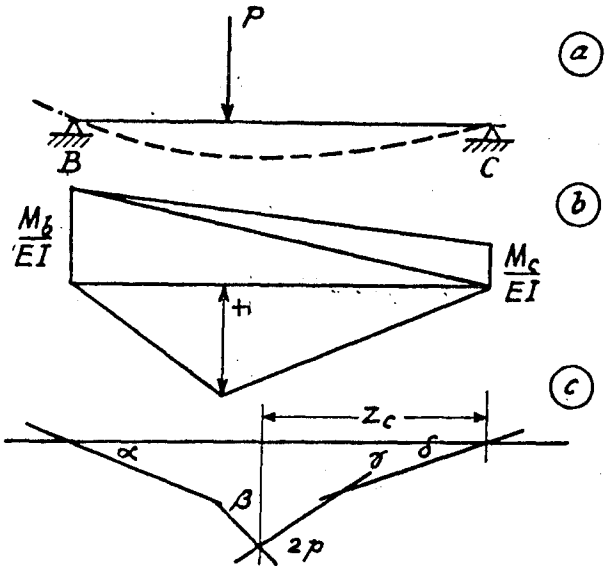
ditunjukkan oleh faktor-lenturan $2p$. Faktor-momennya $2p \,.\, k'$ sesuai dengan :

$$\frac{P\, l^2}{8\ EI} \,.\, \frac{2\ EI}{l} = \frac{P\, l}{4}$$

Jadi

$$\boxed{[\ 2p \,.\, k'\ ] = \frac{P\, l}{4}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(15a)}$$

Kasus 10.



a. Beban-terpusat tidak di tengah dan lendutan
b. Beban-kedua
c. Segibanyak-batang-elastik.

Gambar 1.4.10.

(10) Gambar 1.4.10 melukiskan suatu bentangan-antara, yang memuat suatu beban-terpusat P pada jarak x dari titik-tangkapnya ke perletakan C.

Hubungan antara faktor-faktor-lenturan dijabarkan sebagai berikut:

$$\alpha \,.\, l + \beta \,.\, \frac{2}{3}\, l + \gamma \,.\, \frac{1}{3}\, l = 2p' \,.\, \frac{1}{3}(l + x),$$

kedua ruas-persamaan dibagi dengan $\frac{1}{3}\, l$:

$$3\alpha + 2\beta + \gamma = 2p \left(1 + \frac{x}{l}\right). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

lagi pula

$$\alpha . \frac{2}{3}\, l + \beta . \frac{1}{3}\, l - 2p \,.\, \frac{1}{3}\, x = \delta \,.\, \frac{1}{3}\, l$$

atau $$2\alpha + \beta - 2p \,.\, \frac{x}{l} = \delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (II)$$

Dengan mengurangkan (II) dari I dihasilkan :

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2p \,.$$

yang dapat digunakan untuk kontrol.

Luas dari diagram-momen-reduksian :

$$F = \tfrac{1}{2}\, l \,.\, \frac{P \,.\, x \,.\, (l - x)}{l} \,.\, \frac{l}{EI} = \frac{P \,.\, x \,.\, (l - x)}{2\, EI}$$

ditunjukkan oleh faktor-momen $2p \,.\, k'$ yang sesuai dengan :

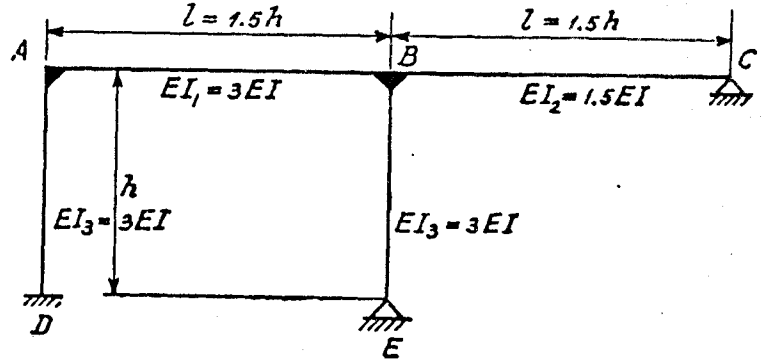
$$\frac{P \,.\, x\,(l - x)}{2\, EI} \,.\, \frac{2\, EI}{l} = \frac{P \,.\, x \,.\, (l - x)}{l} \,.$$

Jadi :

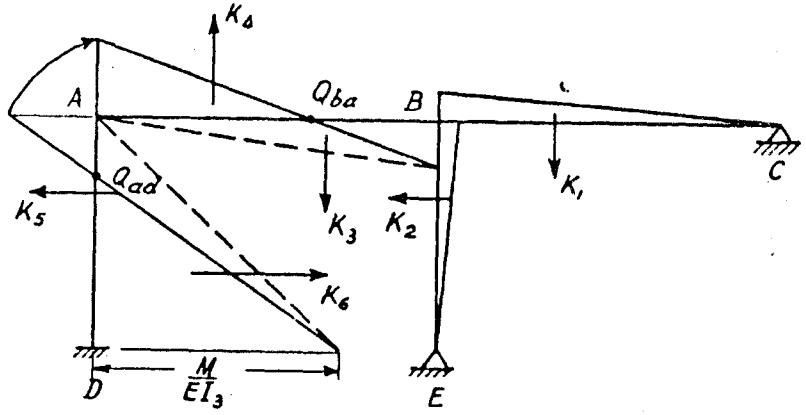
$$\boxed{[\, 2p \,.\, k' \,] = \frac{P\, x\, (l - x)}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15b)$$

§ 5. Analisa titik-titik-tetap dalam konstruksi-konstruksi statik-tak-tertentu.

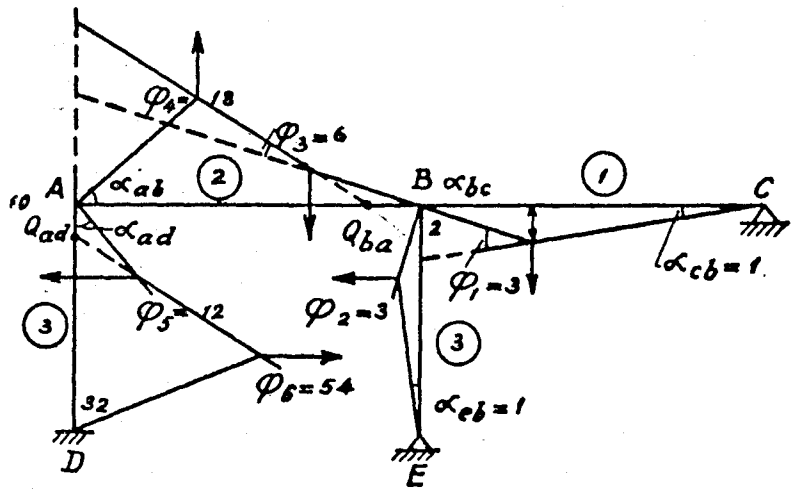
Titik-titik-tetap dari suatu bagian dari suatu kontruksi-statik-tak-tertentu dapat diperbataskan sebagai titik-titik dengan momen-nol atau titik-titik-lenturbalik dari bagiannya, jika salah satu ujung-nya diberi putaran kecil (diterapkan suatu momen), sedang bagian



Gambar 1.5.1a. Kerangka kontinu yang ditinjau.



Gambar 1.5.1b. Beban-kedua dengan momen diterapkan di D.



Gambar 1.5.1c. Segibanyak-batang-elastik

itu tidak memuat beban dan ujung-ujungnya dianggap tidak dapat bergerak. Titik-tetap sebelah-kiri diperoleh dengan menerapkan suatu momen pada ujung-kanannya dan titik-tetap sebelah-kanan dengan menerapkan suatu momen pada ujung-kiri dari bagian-konstruksinya.

Untuk memperoleh titik-titik-tetap dari kerangka-kontinu, yang terlukis pada Gambar 1.5.1., alas D dari kolom AD diberi putaran kecil. Momen-momen dalam kerangkanya, disebabkan oleh putaran ini, dapat ditentukan dengan metode-Clapeyron dari tiga-momen, dengan metode-Cross dari distribusi-momen, atau dengan sesuatu metode lain. Setelah itu titik-titik-tetap diketahui, karena merupakan titik-titik dengan momen-nol dalam diagram-momennya. Khususnya hanya nilai-banding dari momen-momen-ujung dari baloknya yang penting, karena titik-titik dengan momen-nol ditentukan oleh nilai-banding ini, disebabkan perubahan secara linier dari momennya dalam bentangan-bentangannya. Dengan metode faktor-lenturan nilai-banding ini didapat tanpa menganalisa diagram-momen yang sesungguhnya.

Pertama-tama nilai-banding-kekakuan dari bagian-bagian dapat ditentukan :

$$\frac{2\,EI_3}{AD} : \frac{2\,EI_1}{AB} : \frac{2\,EI_3}{BE} : \frac{2\,EI_2}{BC}$$

$$= \frac{6\,EI}{h} : \frac{6\,EI}{1{,}5\,h} : \frac{6\,EI}{h} : \frac{3\,EI}{1{,}5\,h}$$

$$= 3 : 2 : 3 : 1 = k'_{ad} : k'_{ab} : k'_{be} : k'_{bc}.$$

Nilai-nilai-banding-kekakuan ini ditunjukkan dalam gambarnya dalam lingkaran-kecil.

Metode faktor-lenturan memulai hitungannya dari titik-titik yang paling-jauh dari konstruksinya dan berjalan menuju bagian yang dipengaruhinya. Maka dimulai dari sendi C. Nilai-ortogonal-relatif 1 diberikan kepada sudut α_{cb}, maka $\alpha_{bc} = 2$ dan $\varphi_1 = 3$. Sudut-putar dari semua bagian di titik-simpul C sama dengan $\alpha_{bc} = 2$. Maka $\varphi_2 = 3$. Untuk memperoleh φ_3 digunakan persyaratan, bahwa momen-momen di titik-simpul B harus seimbang atau :

$$\varphi_3 \cdot k'_{ab} = \varphi_2 \cdot k'_{be} + \varphi_1 \cdot k'_{bc},$$

$$\varphi_3 \cdot 2 = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 1,$$

$$\varphi_3 = 6.$$

Dilanjutkan : $\varphi_4 = \alpha_{ba} \cdot 3 + \varphi_3 \cdot 2 = 2 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 18.$

$$\alpha_{ab} = \alpha_{ba} \cdot 2 + \varphi_3 \cdot 1 = 2 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 10.$$

Kontrol : $\varphi_4 = \alpha_{ba} + \varphi_3 + \alpha_{ab}$,

$18 = 2 + 6 + 10$, cocok.

Dilanjutkan : $\alpha_{ad} = \alpha_{ab} = 10.$

$$\varphi_5 \cdot 3 = \varphi_4 \cdot 2$$

$$\varphi_5 = \frac{18 \cdot 2}{3} = 12.$$

$$\varphi_6 = \alpha_{ad} \cdot 3 + \varphi_5 \cdot 2 = 10 \cdot 3 + 12 \cdot 2 = 54.$$

$$\alpha_{da} = \alpha_{ad} \cdot 2 + \varphi_5 \cdot 1 = 10 \cdot 2 + 12 \cdot 1 = 32.$$

Kontrol : $\varphi_6 = \alpha_{ad} + \varphi_5 + \alpha_{da}$,

$54 = 10 + 12 + 32$, cocok.

Sekarang semua nilai-ortogonal-relatif, yang diperlukan untuk menghitung lokasi titik-titik-tetap sebelah-kanan, telah diperoleh.

Oleh titik-titik-tetap bentangnya dibagi dalam nilai-banding sama seperti momen-momen-ujungnya dan ini sama dengan nilai-banding faktor-faktor-lenturan di titik-titik-patah segibanyak-batang-elastiknya. Dengan menandai titik-tetap dengan huruf Q, maka didapat yang berikut ini.

Bentangan AB :

$BQ_{ba} : AQ_{ba} = M_{ba} : M_{ab} = \varphi_3 \cdot k_{ab} : \varphi_4 \cdot k_{ab}$

$= \varphi_3 : \varphi_4 = 6 : 18 = 1 : 3.$

Bentangan AD :

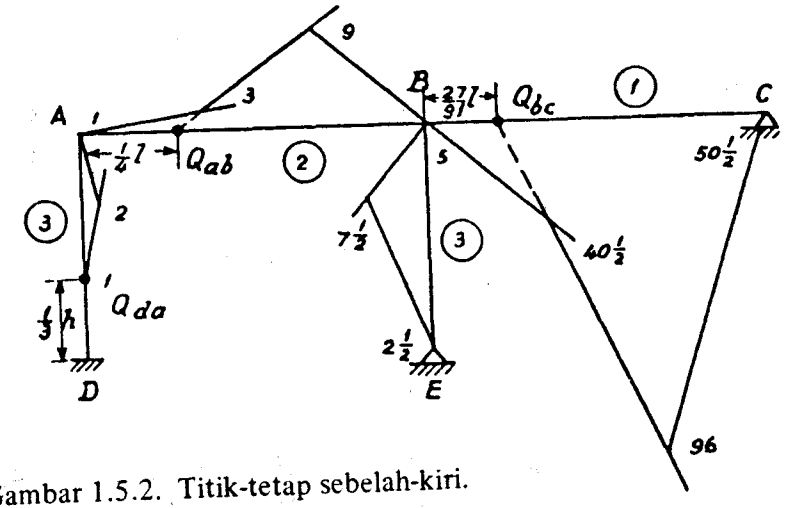
$AQ_{ad} : DQ_{ad} = 12 : 54 = 2 : 9.$

Bentangan BC :

$CQ_{cb} : BQ_{cb} = 0 : 3$, jadi Q_{cb} berimpit dengan sendi C.

Bentangan BE :

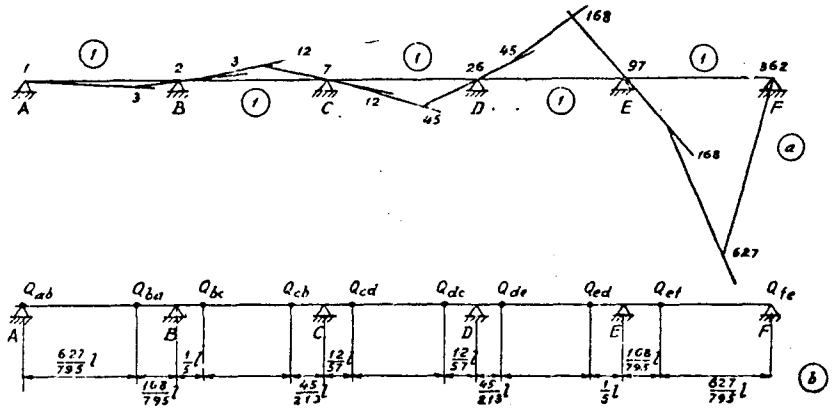
Q_{eb} berimpit dengan sendi E.



Gambar 1.5.2. Titik-tetap sebelah-kiri.

Untuk memperoleh titik-titik-tetap lainnya sebuah momen diterapkan di C, segibanyak-batang-elastik diskets (Gambar 1.5.2) dan faktor-faktor-lenturannya dihitung dengan cara sederhana yang sama. Nilai-banding dari faktor-faktor-lenturan di titik-titik-ketiga dari suatu bagian-konstruksi memberikan nilai-banding dari bagian-bagian-bentangan yang terbagi oleh suatu titik-tetap. Sekarang hanya satu titik-tetap masih belum diketahui, yaitu Q_{be}, yang dapat ditentukan dengan memberikan suatu putaran-kecil kepada E.

Suatu contoh kedua dari analisa titik-titik-tetap dengan faktor-lenturan dapat diperlihatkan dengan balok-kontinu lima-bentangan, yang ditunjukkan dalam Gambar 1.5.3. Semua bentangan mempunyai nilai–EI sama dan panjang sama. Maka kekakuan-kekakuan dari balok-balok juga sama dan nilai-nilai-banding-kekakuan dapat ditetapkan sebesar 1. Titik-perletakan I diberi suatu putaran-kecil,



Gambar 1.5.3. Segibanyak-batang-elastik dan titik-titik-tetap sebelah-kanan.

segibanyak-batang-elastik diskets dan faktor-faktor-lenturan dihitung. Kemudian, karena simetri, titik-titik-tetap sebelah-kiri dan titik-titik-tetap sebelah-kanan keduanya diketahui dari nilai-nilai-banding sederhana dari faktor-faktor-lenturannya (Gambar 1.5.3.b).

Dari contoh-contoh ini jelaslah, bahwa dengan metode ini titik-titik-tetap dapat ditentukan sangat mudah dengan penerapan suatu prosedur-hitungan sederhana, tanpa menggunakan suatu rumus apapun.

§ 6. **Analisa garis-garis-pengaruh .**

Tampaknya segibanyak-batang-elastik dalam Gambar 1.5.1.c. sekaligus merupakan segibanyak-batang-pengaruh untuk momen di D, karena untuk memperoleh garis-pengaruh M_d suatu putaran-sangat-kecil harus diberikan pada D oleh suatu momen M. Garis-lendutan yang didapat merupakan kemudian garis-pengaruhnya yang diinginkan.

Skalanya ditentukan oleh :

$$M_d \cdot \alpha'_{da} = P \cdot dy$$

Tetapi, karena tidak dapat bekerja dengan ordinat kecil-tak-terbatas dy, garis-pengaruhnya harus digambar dengan ordinat-ordinat-terbatas y. Skalanya sekarang ditentukan oleh :

$$M_d \cdot \alpha_{da} = P \cdot y .$$

Sudut-terbatasnya α_{da} harus diukur dengan nilai-ortogonalnya. Jika diinginkan untuk memperoleh garis-pengaruhnya pada suatu skala $M_d = P.y$, maka ort.α harus sama dengan 1. Menurut gambarnya nilai-ortogonal-relatifnya 32. Maka semua faktor-lenturan harus dibagi dengan 32. Untuk putaran-putaran di titik-titik-simpul didapat:

ort . $\alpha_d = 1$ atau secara ringkas :

$$\alpha_d = 1, \quad \alpha_a = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}, \quad \alpha_b = \frac{2}{32} = \frac{1}{16},$$

$$\alpha_c = \frac{1}{32}, \alpha_e = \frac{1}{32}$$

Setelah ini semua ordinat dari garis-pengaruhnya dapat dihitung dengan rumus :

$$y = (\alpha_1 \cdot k_1 \cdot k_2^2 + \alpha_2 \cdot k_1^2 \cdot k_2)\, l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

α_1 dan α_2 merupakan sudut-sudut-lereng-ujung, yang diukur dengan nilai-ortogonalnya.

y = ordinat dari suatu titik, yang membagi bentangannya dalam bagian-bagian $k_1 . l$ dan $k_2 . l$ (dengan $k_1 + k_2 = l$).

Untuk bentangan AB didapat :

$$y = \left(\frac{5}{16} \cdot k_1 \cdot k_2^2 + \frac{1}{16} \cdot k_1^2 \cdot k_2\right) . l .$$

Untuk menggambar garis-pengaruhnya biasanya cukup untuk menentukan ordinat-ordinat di titik-titik, yang membagi bentangannya dalam 10 bagian yang sama besar. Koefisien-koefisien $k_1 . k_2^2$ dan $k_1^2 . k_2$ dapat segera dihitung.

Diperoleh :

$$\begin{aligned}
y_1 &= (0{,}081\,\alpha_1 + 0{,}009\,\alpha_2)\, l \\
y_2 &= (0{,}128\,\alpha_1 + 0{,}032\,\alpha_2)\, l \\
y_3 &= (0{,}147\,\alpha_1 + 0{,}063\,\alpha_2)\, l \\
y_4 &= (0{,}144\,\alpha_1 + 0{,}096\,\alpha_2)\, l \\
y_5 &= (0{,}125\,\alpha_1 + 0{,}125\,\alpha_2)\, l \\
y_6 &= (0{,}096\,\alpha_1 + 0{,}144\,\alpha_2)\, l \\
y_7 &= (0{,}063\,\alpha_1 + 0{,}147\,\alpha_2)\, l \\
y_8 &= (0{,}032\,\alpha_1 + 0{,}128\,\alpha_2)\, l \\
y_9 &= (0{,}009\,\alpha_1 + 0{,}081\,\alpha_2)\, l .
\end{aligned}$$

Ordinat-tengah : $y_5 = y_t = \frac{1}{8}(\alpha_1 + \alpha_2)\, l$.

Bila A sendi, maka $\alpha_2 = 2\alpha_1$ dan bila A jepit $\alpha_1 = 0$, yang memberikan nilai-nilai yang tercantum dalam Daftar I.

Daftar I. Ordinat-ordinat garis-pengaruh di titik-titik, yang membagi bentangan dalam 10 bagian sama besar.

Ordinat	A sendi ($\alpha_2 = 2\,\alpha_1$)	A jepit ($\alpha_1 = 0$)
y_1	0,099 $\alpha_1 l$	0,009 $\alpha_2 l$
y_2	0,192 $\alpha_1 l$	0,032 $\alpha_2 l$
y_3	0,273 $\alpha_1 l$	0,063 $\alpha_2 l$
y_4	0,336 $\alpha_1 l$	0,096 $\alpha_2 l$
y_5	0,375 $\alpha_1 l$	0,125 $\alpha_2 l$
y_6	0,384 $\alpha_1 l$	0,144 $\alpha_2 l$
y_7	0,357 $\alpha_1 l$	0,147 $\alpha_2 l$
y_8	0,288 $\alpha_1 l$	0,128 $\alpha_2 l$
y_9	0,171 $\alpha_1 l$	0,081 $\alpha_2 l$

Rumus (16) sekarang akan dijabarkan.

Ujung B dari baloknya (Gambar 1.6.1.) dianggap terjepit, maka sudut-lereng $\alpha_2 = 0$ dan reaksinya di B disebabkan oleh beban-keduanya sebesar nol. Reaksinya di A disebabkan oleh beban-keduanya sebesar :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\, l \cdot \frac{M}{EI} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\, l \cdot \frac{M}{2\,EI} = \frac{M\,l}{4\,EI}$$

dan sama dengan sudut-lereng α_1 ,

$$\alpha_1 = \frac{M\,l}{4\,EI}$$

Misalkan y' menunjukkan lendutan di titik-S, maka y' = momen di S disebabkan oleh beban-keduanya.

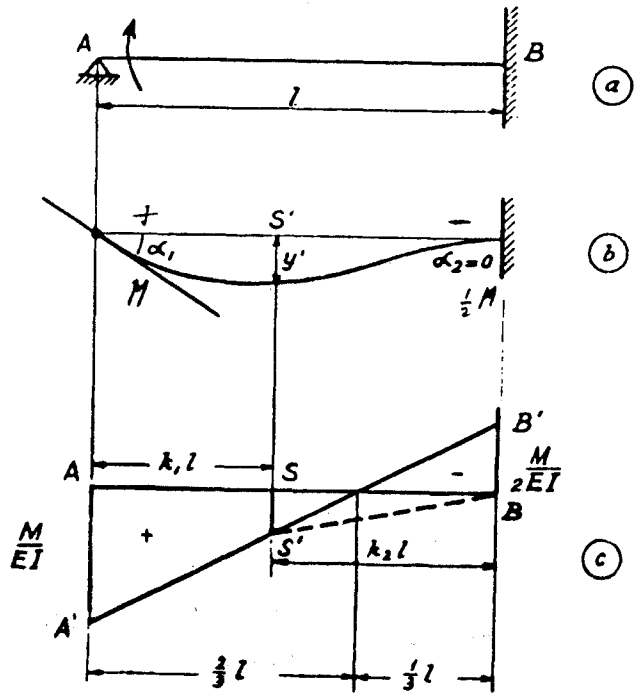
Jadi $y' = (\text{luas } \Delta B\,B'S').\frac{2}{3}\,k_2 l. - (\text{luas } \Delta\ BSS').\ \frac{1}{3}\,k_2 l.$

Tetapi $SS' = \dfrac{k_2 l - \frac{1}{3} l}{\frac{1}{3} l} \cdot BB' = (3\,k_2 - 1) \cdot \dfrac{M}{2\,EI}$

$$= \frac{2\,\alpha_1}{l}\ (3\,k_2 - 1),$$

$$\text{luas } \Delta\ B\,S\,S' = S\,S' \cdot \frac{1}{2} k_2 l = k_2 \cdot \alpha_1\ (3\,k_2 - 1),$$

$$\text{luas } \Delta\ B\,B'S' = B\,B' \cdot \frac{1}{2} k_2 l = \frac{M}{2\,EI} : \frac{1}{2} k_2 l = k_2\,\alpha_1.$$



Gambar 1.6.1. Balok AB, garis-lendutan, diagram-momen beban-kedua.

Maka : $y' = k_2 \cdot \alpha_1 \cdot \frac{2}{3} k_2 l - k_2 \alpha_1 \ (3 k_2 - 1) \cdot \frac{1}{3} k_2 l$

$= \frac{2}{3} k_2^2 \alpha_1 l - k_2^3 \alpha_1 l + \frac{1}{3} k_2^2 \alpha_1 l$

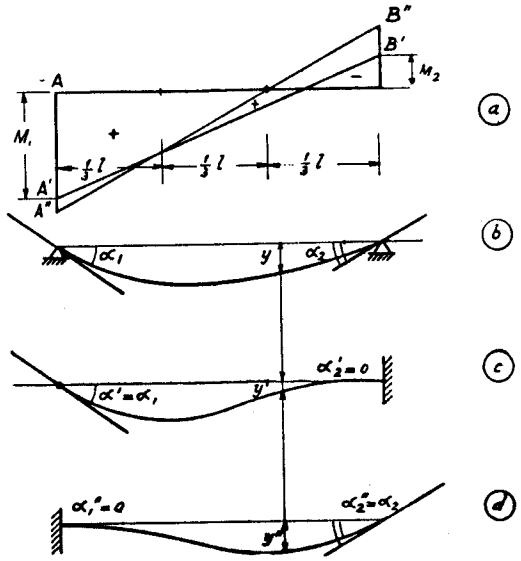
$= (1 - k_2) \ k_2{}^2 \cdot \alpha_1 l$

atau $y' = \alpha_1 \ k_1 \ k_2^2 \ l$ ..... (16a)

Kasus yang dilukiskan dalam Gambar 1.6.2b. dapat dianggap sebagai superposisi dari kasus yang dilukiskan dalam Gambar 1.6.2c. ($y' = \alpha_1 \ k_1 \ k_2{}^2 \ l$) dan yang dilukiskan dalam Gambar 1.6.2d. ($y'' = \alpha_2 \cdot k_1^2 \ k_2 \ l$).

Jadi $y = y' + y'' \ l$),

$y = \alpha_1 \ k_1 \ k_2^2 \ l + \alpha_2 \ k_1{}^2 \ k_2 \ l$, ... (16b)



Gambar 1.6.2. Diagram-momen, garis-lendutan, garis-lendutan pada ujung-kanan terjepit, garis-lendutan pada ujung-kiri terjepit.

dan dengan $k_1 \ l = x$ dan $k_2 \ l = l - x$:

$$y = \frac{\alpha_1}{l^2} \ x \ (l - x)^2 + \frac{\alpha_2}{l^2} \cdot x^2 \ (l - x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Untuk suatu sistem beban-beban-terpusat ordinat-ordinat dari garis-pengaruh pada beban-bebannya dengan cepat dan secara saksama didapat dengan penerapan rumus (16) dan (17).

Dalam hal terdapat suatu beban-terbagi-sebarang q_x dari x = a hingga x = b, maka :

$$G = \int_a^b y \cdot q_x \cdot dx$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\alpha_1}{l^2} \cdot x \ (l - x)^2 + \frac{\alpha_2}{l^2} x^2 \ (l - x) \right] q_x \cdot dx,$$

dengan G = kuantitas yang berlaku untuk garis-pengaruhnya.

Untuk suatu beban-terbagi-rata q_x = q ton tiap satuan-panjang

$$G = q \int_a^b y \cdot dx,$$

sehingga luas diagram-pengaruh : $0 = \int_a^b y.dx$ merupakan ukuran untuk G. Pengintegralannya tidak menimbulkan kesulitan. Bila seluruh bentangannya memuat suatu beban-terbagi-rata q t/m, maka :

$$G = q \int_0^b y \cdot dx = q \cdot 0,$$

$$0 = \frac{\alpha_1}{l^2} \int_0^l (l^2 x - 2lx^2 + x^3) \, dx + \frac{\alpha_2}{l^2} \int_0^l (lx^2 - x^3) \, dx$$

$$= \frac{\alpha_1}{l^2} (\tfrac{1}{2} l^4 - \tfrac{2}{3} l^4 + \tfrac{1}{4} l^4) + \frac{\alpha_2}{l^2} (\tfrac{1}{3} l^4 - \tfrac{1}{4} l^4),$$

$$0 = \tfrac{1}{12} l^2 (\alpha_1 + \alpha_2). \qquad (18)$$

Dengan rumus ini luas dari diagram-pengaruh dapat segera dihitung, bahkan tanpa menggambar garis-pengaruhnya.

Dengan garis-pengaruh untuk M_d (Gambar 1.5.1c) didapat untuk bentangan AB :

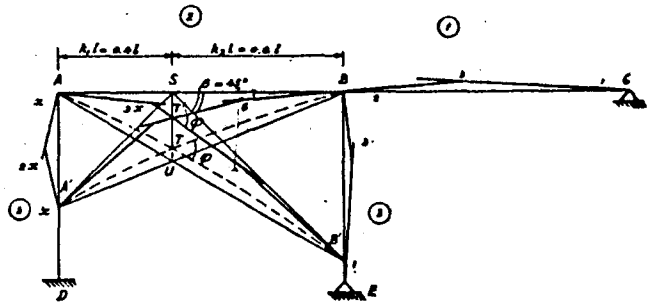
$$0 = \frac{1}{12} l^2 \quad (\frac{5}{16} + \frac{1}{16}) = \frac{1}{32} l^2 .$$

Dengan menyisipkan nilai ordinat-tengah $y_m = \frac{1}{8}(\alpha_1 + \alpha_2)l$ dalam (18

diperoleh hubungan :

$$0 = \frac{2}{3} y_m l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Rumus-rumus (16), (17), (18), (19) tidak hanya berlaku untuk garis-pengaruh untuk momen-lentur, tetapi juga untuk garis-garis-pengaruh untuk geser, reaksi, gaya-normal dan sebagainya.



Gambar 1.6.3. Segibanyak-batang-pengaruh untuk garis-pengaruh-momen di S.

Sekarang akan dihitung garis-pengaruh untuk *momen-lentur di potongan S dalam* bentangan AB. Jalan paling mudah ialah untuk memandang segibanyak-batang-elastiknya sebagai superposisi dari bagian-kiri dan bagian-kanan dari dua segibanyak-batang-elastik seperti yang terlukis dalam Gambar 1.6.3. Diinginkan untuk memperoleh garis-pengaruhnya pada skala M = P.y, sehingga harus dibuat ort. $\varphi = 1$ dan karena itu $\beta = 45^0$.

Hitungannya dilaksanakan dari sebelah-kiri dan sebelah-kanan ke potongan S. Dalam hitungan dari sebelah-kiri x dibawa sebagai anu-awal. Kemudian x didapat dari syarat :

$$ST' = x \,.\, k_1 l + 3x(k_1 l - \tfrac{1}{3} l) = 2 k_2 l + 6 (k_2 l - \tfrac{1}{3} l)$$

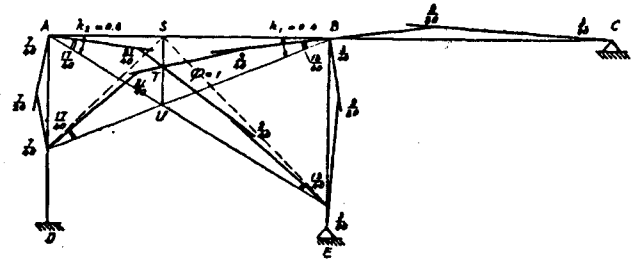
maka $$x = \frac{8 k_2 - 2}{4 k_1 - 1}$$

Dengan anggapan $k_1 = 0{,}4$ dan $k_2 = 0{,}6$, maka $x = \frac{2{,}8}{0{,}6} = 4\frac{2}{3}$.

Nilai-ortogonal-relatif φ ialah :

$$x + 3x + 6 + 2 = 4x + 8 = 26\frac{2}{3} .$$

Nilai-ortogonal φ harus sama dengan 1, maka, untuk memperoleh nilai-nilai-ortogonal yang benar, faktor-faktor-lenturannya harus dibagi dengan $26\frac{2}{3}$. Nilai-nilai-ortogonal ini dimasukkan dalam



Gambar 1.6.4. Segibanyak-batang-pengaruh dengan nilai-nilai-ortogonal pada $\varphi = 1$.

Semua bagian dari garis-pengaruhnya sekarang dapat segera ditentukan dengan rumus (16) dan (17). Garis-pengaruh untuk bentangan AB didapat dengan memasang nilai-nilai :

$$y = \frac{17}{40\,l^2} \cdot x\,(l-x)^2 + \frac{13}{40\,l^2} \cdot x^2\,(l-x)$$

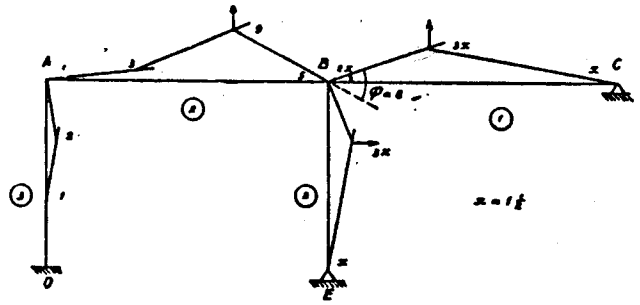
dari garis-patah AUB (Gambar 1.6.4) ke atas.

Bila bentangan AB dibebani penuh oleh suatu beban-terbagi-rata dan diinginkan untuk menentukan luas dari diagram-pengaruh ATB, maka dengan penerapan rumus (18) didapat:

$$0 = \text{luas } \Delta \text{ AUB} - \frac{1}{12}\,l^2\,(\frac{17}{40} + \frac{13}{40})$$

$$= \tfrac{1}{2}\,k_1\,k_2\,l^2 - \frac{1}{16}\,l^2 = \frac{23}{400}\,l^2.$$

Jika potongan S terletak antara kira-kira $\frac{1}{5}\,l$ dan $\frac{1}{3}\,l$ dari ujung-ujung-bentangannya, maka tidak diketahui pada awal apakah potongannya terletak di dalam atau di luar teras dari bentangannya atau di titik-tetapnya sendiri. Teras dari bentangannya diperbataskan sebagai bagian-bentangannya di antara titik-titik-tetapnya. Karena itu hitungannya dimulai dari bagian dari konstruksinya, yang memuat ujung-bentangannya yang terdekat pada potongannya. Setelah sampai di bentangan yang bersangkutan, diperoleh letak dari titik-tetap yang bersangkutan dan kemudian arah-jalan dari bagian-tersisa dari segibanyak-batang-elastiknya diketahui. Jika potongannya berimpit dengan sebuah titik-tetap, maka semua ordinat dari bagian tersebut dari garis-pengaruhnya, di sisi ujung-bentangan yang lebih jauh, dari ujung ini sama dengan nol. Jika potongannya terletak di luar terasnya, maka terjadi titik-lendutan-nol dalam bentangannya.



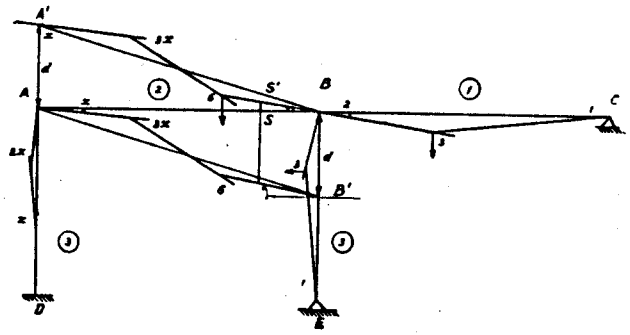
Gambar 1.6.5. Segibanyak-batang-pengaruh untuk momen di B.

Untuk memperoleh garis-pengaruh untuk *momen di potongan tepat di sebelah-kiri titik-simpul B* segibanyak-batang-elastiknya diskets dan faktor-faktor-lenturannya dihitung. Anunya x didapat dengan persyaratan, bahwa momen-momen sekitar titik-simpul B harus berjumlah nol untuk keseimbangan :

$$3x \cdot 3 + 3x \cdot 1 = 9 \cdot 2,$$

maka $x = 1\tfrac{1}{2}$.

Nilai-ortogonal-relatif dari φ ialah $2x + 5 = 8$. Jika diinginkan $\varphi = 1$, maka semua faktor-lenturan harus dibagi dengan 8. Kemudian semua ordinat dapat diperoleh dengan rumus (16) atau (17).



Gambar 1.6.6. Segibanyak-batang-pengaruh untuk gayalintang di titik S.

Cara yang termudah untuk memperoleh *garis-pengaruh untuk gayalintang di potongan S* dari bentangan AB ialah dengan menggabungkan garis-garis-pengaruh untuk gayalintangnya di potongan-potongan-ujungnya dari bentangannya. Garis-pengaruh untuk sebarang potongan S kemudian diperoleh dengan menarik suatu garis-vertikal liwat S. Hitungannya telah dilaksanakan seperti yang diperlihatkan dalam Gambar 1.6.6. Dari tinjauan dari simpangan-simpangan dari sudut-sudut-lenturannya sepanjang jalan BA′ atau B′A, terhadap garis-horisontal, diperoleh syarat geometrik :

$$2 + 6 - 3x = x,$$

maka $x = 2.$

Hasil ini dapat juga diperoleh dengan hitungan berikut :

$$\begin{aligned} d &= x \,.\, l + 3x \,.\, \tfrac{2}{3} l - 6 \,.\, \tfrac{1}{3} l \\ &= 2l + 6 \,.\, \tfrac{2}{3} l - 3x \,.\, \tfrac{1}{3} l \\ x + 2x - 2 &= 2 + 4 - x \end{aligned}$$

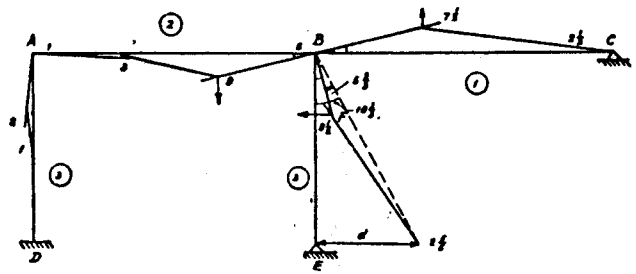
maka $x = 2.$

Jika faktor-faktor-lenturan ini merupakan nilai-nilai-ortogonal tertentu dari sudut-sudutnya, maka :

$$d = 2 \,.\, l + 6 \,.\, \frac{2}{3} l - 6 \frac{1}{3} l = 4 l.$$

Pada penggambaran garis-pengaruhnya skalanya diambil jauh kurang, misalnya $d = \frac{1}{n}$. Faktor-faktor-lenturannya kemudian harus dibagi dengan 4n.

Ordinat-ordinat dari garis-pengaruhnya dapat lagi dihitung dengan rumus (16) atau (17) dan luas dari diagram-pengaruhnya dengan rumus (18) atau (19).



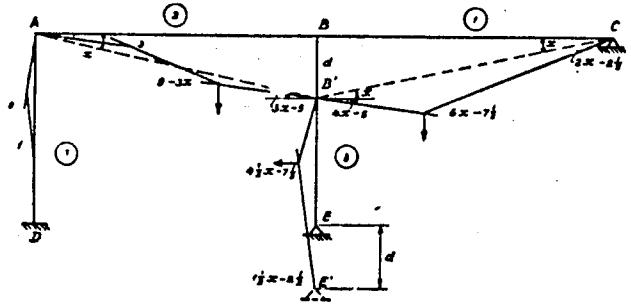
Gambar 1.6.7. Segibanyak-batang-pengaruh untuk reaksi-horisontal di E.

Gambar 1.6.7. melukiskan segibanyak-batang-pengaruh untuk *reaksi-horisontal di E.* Dari gambarnya tampak, bahwa :

$$\frac{d}{h} = 10 \frac{2}{3} \quad \text{atau} \quad d = \frac{32}{3} h.$$

Jika diinginkan untuk memperoleh garis-pengaruhnya pada skala 1 ton = $d = \frac{h}{n}$, maka semua faktor-lenturannya harus dibagi dengan $\frac{32}{3} n$.

Gambar 1.6.7. pada saat yang sama dapat digunakan untuk menghitung momen-momen dalam konstruksinya disebabkan oleh suatu pindahan ("displacement") – horisontal dari sendi E.



Gambar 1.6.8. Segibanyak-batang-pengaruh untuk reaksi-vertikal di E.

Untuk memperoleh garis pengaruhnya dari *reaksi-vertikalnya di E* kolom-BE diturunkan sepanjang jarak d. Segibanyak-batang-pengaruh diskets dalam Gambar 1.6.8. Faktor-faktor-lenturan dihitung dari kiri ke kanan dengan membawa serta kuantitas $x = \frac{d}{l}$ sebagai anu-awal. Dengan menerapkan syarat, bahwa momen-momen sekitar titik-simpul B harus berimbangan, maka :

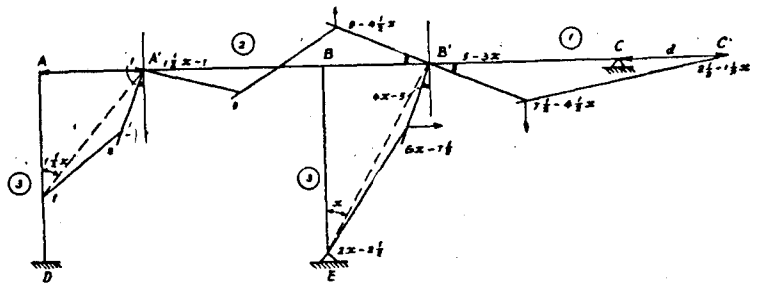
$$(9 - 3.x) \,.\, 2 = (4\tfrac{1}{2}x - 7\tfrac{1}{2}) \,.\, 3 + (6x - 7\tfrac{1}{2}) \,.\, 1 ,$$

sehingga $$x = \frac{32}{17} = \frac{d}{l} ,$$

$$d = \frac{32}{17} \,.\, l .$$

Jika diinginkan $d = \frac{l}{n}$, maka semua faktor-lenturan harus dibagi dengan $\frac{32}{17}$ n.

Gambar 1.6.8. dapat digunakan untuk menghitung diagram-momen disebabkan oleh pindahan-vertikal dari sendi E.



Gambar 1.6.9. Segibanyak-batang-pengaruh untuk reaksi-horisontal C_h di sendi C.

Untuk memperoleh garis-pengaruh untuk *reaksi-horisontal* C_h *di sendi*-C, yang pada saat yang sama merupakan gaya-normal di balok-BC, sendi-C diberi pindahan-horisontal d. Segibanyak-batang-pengaruhnya dilukis dalam Gambar 1.6.9.

Faktor-faktor-lenturnya dihitung dari kiri ke kanan dengan $x = \frac{d}{h}$ sebagai anu-awal. Dengan syarat momen-momen sekitar titik-simpul B harus berimbangan, maka :

$$(9 - 4\tfrac{1}{2}x) \,.\, 2 + (7\tfrac{1}{2} - 4\tfrac{1}{2}x) \,.\, 1 = (6x - 7\tfrac{1}{2}) \,.\, 3 .$$

sehingga $$x = \frac{32}{21} = \frac{d}{h} ,$$

$$d = \frac{32}{21} \; h.$$

Jika dikehendaki $d = \frac{h}{n}$, maka semua faktor-lenturan harus dibagi dengan $\frac{32}{21}$ n.

Dalam menerapkan rumus (16) atau (17) pada bentangan AB harus diperhatikan, bahwa sudut α_{ba} harus diperhitungkan sebagai sudut-negatif. Catatan ini berlaku pula untuk sudut $\alpha_{ab'}$ dan $\alpha_{ba'}$ dalam Gambar 1.6.6. dan sudut $\alpha_{ab'}$ dalam Gambar 1.6.8.

Sebagai contoh analisa garis-garis-pengaruh dari *konstruksi-kontinu* yang meliputi *simpangan-samping* ("side sway") kerangka yang sama, seperti yang dilukiskan dalam Gambar 1.5.1., ditinjau. Dianggap sendi–C diganti dengan rol. Pada analisa konstruksi-konstruksi demikian hasil akhir dapat dipandang sebagai superposisi dari dua jenis pembebanan sebagai berikut ini.

I. Simpangan-samping dari baloknya dicegah oleh suatu gaya-horisontal H, yang menjadikan konstruksinya tanpa simpangan-samping. Untuk konstruksi ini momen-momen, yang disebabkan oleh pembebanan tertentu, dihitung dan gaya-horisontalnya dinilai.

II. Gaya-H diterapkan pada konstruksinya dalam arah berlawanan dan momen-momen, yang dihasilkan, dihitung.

Superposisi dari pengaruh dari kedua jenis pembebanan memberikan pengaruh yang disyaratkan dari pembebanan yang ditetapkan pada konstruksinya, yang meliputi simpangan-samping.

Pada analisa garis-garis-pengaruh penguraian dalam kedua jenis pembebanan tersebut di atas harus dibayangkan untuk setiap letak bebannya P = 1 ton. Kemudian akan nyata, bahwa garis-pengaruh untuk momen di potongan S dari bentangan AB diperoleh dengan superposisi dari yang berikut ini.

I. Garis-pengaruh y' untuk momen di S, bila C merupakan sendi.

II. Variasi momen di S, yang disebabkan oleh gaya-horisontal H yang bekerja pada baloknya, mempunyai besaran yang berubah sebagai garis-pengaruh y'' untuk reaksi-horisontalnya C_h. Garis-pengaruhnya telah dihitung (Gambar 1.6.9.).

Bila momen di S, yang dihasilkan oleh H = 1 ton, sebesar m tm, maka momen di S, yang dihasilkan oleh H = y'' ton, sebesar m.y'' tm.

Superposisi memberikan :

$$y = y' + my''.$$

Sejalan diperoleh garis-pengaruh untuk gaya-lintang (geser) di S, bila C berupa rol,

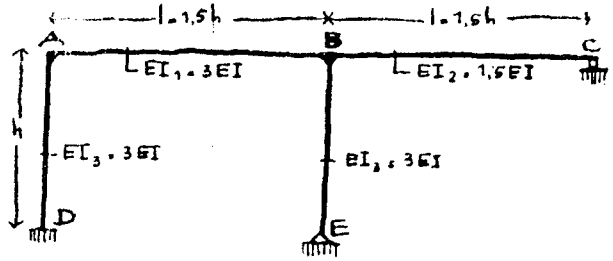
$$y = y' + dy'' ,$$

y' ialah garis-pengaruh untuk gayalintang (geser) di S, bila C berupa sendi; garis-pengaruh ini telah dihitung (Gambar 1.6.6.), d ialah gaya-lintang (geser) di S, dihasilkan oleh H = 1 ton, y'' ialah garis-pengaruh untuk reaksi-horisontal C_h (Gambar 1.6.9.).

Segibanyak-batang-pengaruh dari Gambar 1.6.9. pada saat yang sama juga garis-pengaruh untuk *pindahan-horisontal dari rol C.* Menurut teorema Maxwell dari lendutan-timbal-balik garis-pengaruh untuk pindahan-horisontal dari rol C identik dengan kurve-elastik, yang disebabkan oleh gaya-horisontal H = 1 ton. Bila diinginkan untuk memperoleh pindahan-pindahan pada suatu skala besaran nyata, maka simpangan disebabkan oleh H = 1 ton ditetapkan dan d pada Gambar 1.6.9. dibuat sama dengan itu.

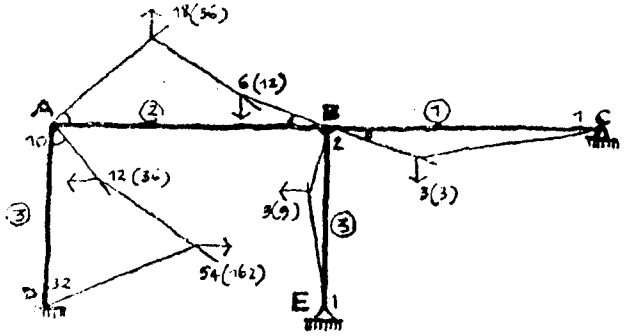
Cara tak langsung ini meliputi superposisi faktor-faktor-lenturan dari dua (atau lebih) segibanyak-batang-pengaruh. Sebenarnya dapat digunakan cara langsung (telah diuraikan dalam majalah

Insinyur Indonesia No. 7, Juli 1964 oleh Achmad Antono), yang hanya menggunakan satu segibanyak-batang-pengaruh, sehingga lebih menguntungkan dalam penerapannya. Hal ini menyangkut penyelesaian lebih mudah, pengurangan kerja, hitungan dan kesalahan.



Gambar 1.6.10. Kerangka dengan rol di C.

Pada Gambar 1.6.10. terlukis kerangka dengan rol di C. Ditinjau dulu cara taklangsung untuk memperoleh segibanyak-batang-pengaruh untuk momen di D. Hasilnya kemudian digunakan untuk pembandingan dengan cara langsung.



Gambar 1.6.11. Momen-terapan di D, rol di C diganti sendi.

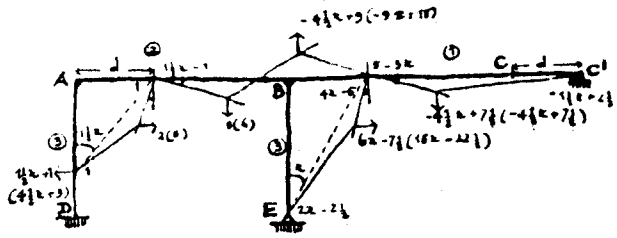
Pada langkah-pertama diadakan putaran di D dengan pindahan-horisontal di C dicegah oleh penggantian rol C dengan sendi. Segibanyak-batang-pengaruh terlukis di Gambar 1.6.11. (nilai-banding-kekakuan terlukis dalam lingkaran pada batang yang bersangkutan). Dianggap momen-terapan di D sebesar 162 tm. . Maka momen-momen :

$M_{da} = [\ 162\ ] = 162$ tm,
$M_{ba} = [\ 12\ ] = 12$ tm,
$M_{bc} = [\ 3\ ] = 3$ tm,
$M_{ad} = [\ 36\ ] = 36$ tm $= M_{ab}$,
$M_{be} = [\ 9\ ] = 9$ tm.

Reaksi-horisontal di C diperoleh sebagai berikut :

$$H_1 = \frac{162 + 36 + 9}{h} = \frac{207}{h} \text{ ton, dengan h = tinggi-kerangka.}$$

Pada langkah-kedua rol C diberi pindahan-horisontal d oleh beban-horisontal H_2. Segibanyak-batang-pengaruhnya terlukis pada Gambar 1.6.12.



Gambar 1.6.12. Rol di C diberi pindahan d oleh beban-horisontal H_2.

Syarat keseimbangan di B menghasilkan :

$$2\ (-4\tfrac{1}{2}x + 9) + 1\ (-4\tfrac{1}{2}x + 7\tfrac{1}{2}) = 3\ (6x - 7\tfrac{1}{2})$$
$$48 = 31\tfrac{1}{2}x$$
$$x = \frac{32}{21}.$$

Dianggap faktor-momen $[\ \frac{1}{21}\ ]$ sesuai dengan 1 tm, maka dengan $x = \frac{32}{21}$ didapat :

$$M_{da} = [\ 3\ (1\tfrac{1}{2}x + 1)\ ] = [\ \frac{207}{21}\ ] = 207 \text{ tm},$$
$$M_{ad} = [\ 3\ .\ 2\ ] = [\ \frac{126}{21}\ ] = 126 \text{ tm} = M_{ab},$$
$$M_{ba} = [\ 2\ (9 - 4\tfrac{1}{2}x)\ ] = [\ \frac{90}{21}\ ] = 90 \text{ tm},$$
$$M_{be} = [\ 3\ (6x - 7\tfrac{1}{2})\ ] = [\ \frac{103{,}5}{21}\ ] = 103{,}5 \text{ tm},$$
$$M_{bc} = [\ 1\ (-4\tfrac{1}{2}x + 7\tfrac{1}{2})\ ] = [\ \frac{13{,}5}{21}\ ] = 13{,}5 \text{ tm}.$$

Nilai H_2 diperoleh dari :

$$H_2 = \frac{207 + 126 + 103{,}5}{h} = \frac{436{,}5}{h} \text{ ton.}$$

Hasil akhir diperoleh sebagai jumlah dari hasil langkah-pertama dan $\frac{H_1}{H_2}$ kali hasil langkah-kedua dengan $\frac{H_1}{H_2} = \frac{207}{436{,}5} = \frac{46}{97}$. Misalnya M_{da} bernilai $(162 - \frac{46}{97} \cdot 207) = \frac{6192}{97}$ tm. Sebenarnya diinginkan momen-terapan di D sebesar 1 tm saja. Ini berarti, bahwa semua hasil harus dibagi dengan $\frac{6192}{97}$. Hitungannya memberikan :

$M_{da} = 1$ tm,

$M_{ad} = \frac{97}{6192}\ (36 - \frac{46}{97} \cdot 126) = -\frac{2304}{6192}$ tm $(= 0{,}372) =$

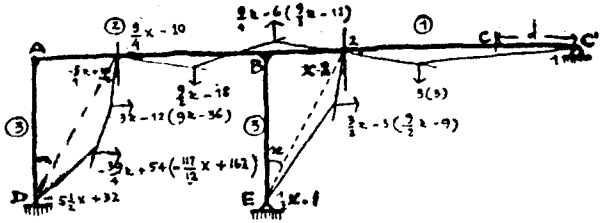
M_{ab}

$$M_{ba} = \frac{97}{6192}\,(12 - \frac{46}{97}\,.\,90) = -\frac{2976}{6192}\text{ tm } (= 0{,}481),$$

$$M_{be} = \frac{97}{6192}\,(9 - \frac{46}{97}\,.\,103{,}5) = -\frac{3888}{6192}\text{ tm } (= 0{,}627),$$

$$M_{bc} = \frac{97}{6192}\,(3 + \frac{46}{97}\,.\,13{,}5) = +\frac{912}{6192}\text{ tm } (= 0{,}147).$$

Tanda negatif menunjukkan suatu arah-lawan dari yang dianggap dalam langkah-pertama. Hasil-hasil ini akan digunakan dalam pengontrolan prosedur lainnya. Faktor-faktor-lenturan juga harus dihitung secara sama. Dari nilai-nilai ini ordinat-ordinat dari garis-pengaruhnya dapat dihitung.



Gambar 1.6.13. Momen-terapan di D, rol di C pindah sepanjang d.

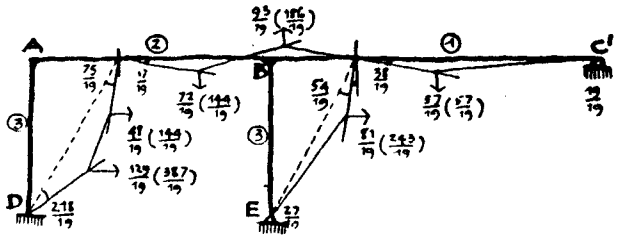
Dalam Gambar 1.6.13. diterapkan momen di D, rol di C mendapat pindahan sepanjang d dan dilukis segibanyak-batang-pengaruhnya. Sebagai anu-awal digunakan $x = \frac{d}{h}$. Hitungannya dilaksanakan dari kiri ke kanan, dimulai dengan nilai faktor-lenturan 1 di C'.

Dengan syarat gaya-horisontal harus sama dengan nol didapat:

$$[\,3\,(-\frac{39}{4}\,x + 54) - 3\,(3x - 12) - 3\,(\frac{3}{2}\,x - 3)\,] = 0,$$

maka $x = \frac{92}{19}$.

Substitusi nilai ini menghasilkan faktor-faktor-lenturan seperti yang diperlihatkan dalam Gambar 1.6.14.



Gambar 1.6.14. Faktor-faktor-lenturan dengan $x = \frac{92}{19}$.

Di dalam kurung tertera faktor-faktor-momen (= faktor-lenturan kali nilai-banding-kekakuan). Karena diinginkan momen-terapan di D sebesar 1 ton, maka :

$$[\,\frac{387}{19}\,] = 1\text{ tm}, \quad \text{atau} \quad [\,\frac{1}{19}\,] = \frac{1}{387}\text{ tm}.$$

Jadi :

$$M_{ad} = [\,\frac{144}{19}\,] = \frac{144}{387}\text{ tm } (= 0{,}372) = M_{ab},$$

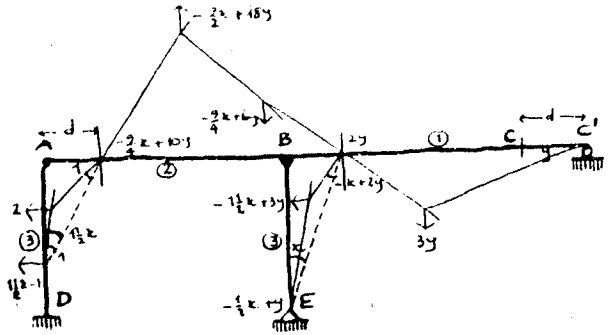
$$M_{ba} = [\,\frac{186}{19}\,] = \frac{186}{387}\text{ tm } (= 0{,}481),$$

$$M_{be} = [\,\frac{243}{19}\,] = \frac{243}{387}\text{ tm } (= 0{,}627),$$

$$M_{bc} = [\,\frac{57}{19}\,] = \frac{57}{387}\text{ tm } (= 0{,}147),$$

yang ternyata merupakan nilai-nilai yang sama seperti yang diperoleh dengan cara tak langsung !

Beberapa contoh lebih lanjut dari cara ini diberikan di bawah ini.



Gambar 1.6.15. Segibanyak-batang-pengaruh untuk momen di A.

Dalam Gambar 1.6.15. terlukis segibanyak-batang-pengaruh untuk momen di A. Anu-anu-awal ialah y di rol di C dan $x = \frac{d}{h}$, dengan d = pindahan-horisontal.

Syarat-syarat yang harus dipenuhi sebagai berikut :

(1) *keseimbangan momen di A :*

$$[\, 2\,(-\tfrac{9}{2}x + 18y)\,] = [\, 6\,],$$

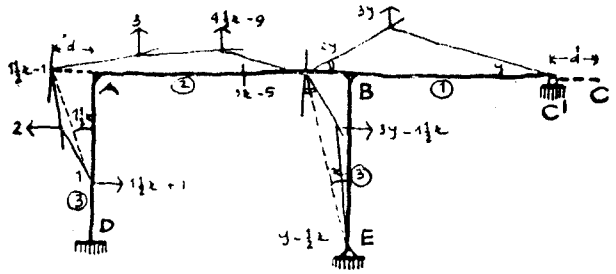
$$-3x + 12y = 2,$$

(2) *gaya-horisontal yang dihasilkan = 0*

$$\frac{[\, 3\,(1\tfrac{1}{2}x - 1 - 2)\,]}{h} - \frac{[\, 3\,(-1\tfrac{1}{2}x + 3y)\,]}{h} = 0,$$

$$x - y = 1,$$

maka dihasilkan $y = \frac{5}{9}$ dan $x = \frac{14}{9}$.



Gambar 1.6.16. Segibanyak-batang-pengaruh untuk momen di potongan di kiri titik B.

Dalam Gambar 1.6.16. telah dilukis segibanyak-batang-pengaruhnya untuk momen di potongan tepat di sebelah-kiri titiksimpul B. Anu-anu-awal yang digunakan ialah y di rol C dan $x = \frac{d}{h}$, dengan d = pindahan-horisontal.

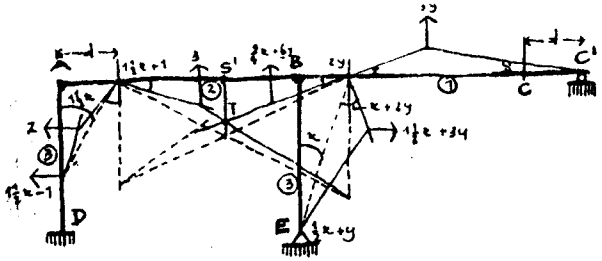
Syarat-syarat yang harus dipenuhi sebagai berikut :

1. *keseimbangan momen di B :*
   $[\, 9x - 18\,] = [\, 3y + 9y - 4\tfrac{1}{2}x\,]$
   $9x - 8y = 12,$

2. *gaya-horisontal yang dihasilkan = 0,*

$$\frac{[\, 3\,(1\tfrac{1}{2}x + 1 + 2)\,]}{h} - \frac{[\, 3\,(3y - 1\tfrac{1}{2}x)\,]}{h} = 0$$

$x - y = -1,$
maka didapat $x = 20$ dan $y = 21$.



Gambar 1.6.17. Segibanyak-batang-pengaruh untuk momen di S.

Dalam Gambar 1.6.17. telah dilukis segibanyak-batang-pengaruh untuk momen di potongan S dari bentangan AB, sejauh 0,4 l dari A. Anu-anu-awal yang digunakan ialah y di rol C dan $x = \frac{d}{h}$, dengan d = pindahan-horisontal.

Syarat-syarat yang harus dipenuhi ialah :

(1) *gaya-horisontal yang dihasilkan = 0,*

$$\frac{[\,3\,(-1\tfrac{1}{2}x + 1 + 2)\,]}{h} - \frac{[\,3\,(1\tfrac{1}{2}x + 3y)\,]}{h} = 0,$$

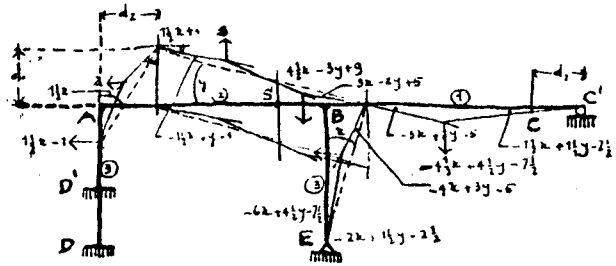
$$x + y = 1,$$

(2) $ST = (1\tfrac{1}{2}x + 1)\,.\,\frac{4}{10}\,l + 3\,(\frac{4}{10} - \frac{1}{3})\,l =$

$$2y\,.\,\frac{6}{10}\,l + (\frac{9}{4}x + 6y)\,(\frac{6}{10} - \frac{1}{3})\,l,$$

$$y = \frac{3}{14}\,,$$

maka dihasilkan $x = \frac{11}{14}$.



Gambar 1.6.18. Segibanyak-batang-pengaruh untuk gayalintang (geser) di S.

Dalam Gambar 1.6.18. telah dilukis segibanyak-batang-pengaruh untuk gayalintang (geser) di pótongan S dari bentangan AB, yang sebenarnya merupakan gabungan dari segibanyak-segibanyak-batang-pengaruh di potongan-potongan-ujung dari bentangannya. Sebagai anu-anu-awal digunakan $y = \frac{d_1}{l}$ dan $x = \frac{d_2}{h}$, dengan d_1 = pindahan-vertikal dan d_2 = pindahan-horisontal.

Syarat-syarat yang harus dipenuhi ialah :

(1) *keseimbangan momen di B :*

$$[\,9x - 6y + 18\,] = [\,-18x + 13\tfrac{1}{2}y - 22\tfrac{1}{2} - 4\tfrac{1}{2}x + 4\tfrac{1}{2}y - 7\tfrac{1}{2}]$$

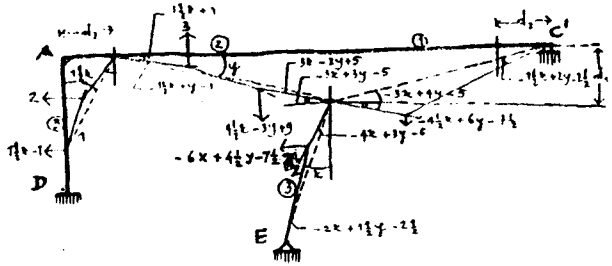
$$21x - 16y = -32,$$

(2) *gaya-horisontal yang dihasilkan = 0,*

$$\frac{[\,3\,(1\tfrac{1}{2}x - 1 - 2]}{h} - \frac{[\,3\,(-6x + 4\tfrac{1}{2}y - 7\tfrac{1}{2})\,]}{h} = 0,$$

$$5x - 3y = -3,$$

maka didapat $x = \frac{48}{17}$ dan $y = \frac{97}{17}$.



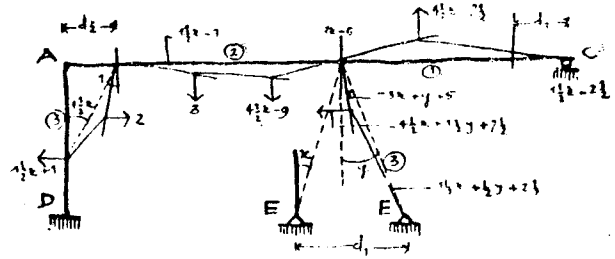
Gambar 1.6.19. Segibanyak-batang-pengaruh untuk reaksi-vertikal di E.

Dalam Gambar 1.6.19. dilukis segibanyak-batang-pengaruh untuk reaksi-vertikal di E. Sebagai anu-anu-awal digunakan $y = \frac{d_1}{l}$ dan $x = \frac{d_2}{h}$, dengan d_1 = pindahan-vertikal dan d_2 = pindahan-horisontal.

Syarat-syarat yang harus dipenuhi sebagai berikut :

1). *keseimbangan momen di B,*
$[9x - 6y + 18] = [(-18x + 13\frac{1}{2}y - 22\frac{1}{2}) + (-4\frac{1}{2}x + 6y - 7\frac{1}{2})]$,
$21x - 17y = -32$,

2). *gaya-horisontal yang dihasilkan = 0,*
$$\frac{[\,3\,(1\frac{1}{2}x - 1 - 2)\,]}{h} - \frac{[\,3\,(-6x + 4\frac{1}{2}y - 7\frac{1}{2})\,]}{h} = 0.$$
$5x - 3y = -3$,
yang memberikan $x = \frac{45}{22}$ dan $y = \frac{97}{22}$.



Gambar 1.6.20. Segibanyak-batang-pengaruh untuk reaksi-horisontal di E.

Dalam Gambar 1.6.20. dilukis segibanyak-batang-pengaruh untuk reaksi-horisontal di E. Sebagai anu-anu-awal digunakan $y = \frac{d_1 - d_2}{h}$ dan $x = \frac{d_2}{l}$, dengan d_1 = pindahan-horisontal di E dan d_2 = pindahan-horisontal di C.

Syarat-syarat yang harus dipenuhi sebagai berikut :

(1) *keseimbangan momen di B,*
$[9x - 18 + 4\frac{1}{2}x - 7\frac{1}{2}] = [-13\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}y + 22\frac{1}{2}]$,
$18x - 3y = 32$,

(2) *gaya-horisontal yang dihasilkan = 0 :*
$$\frac{[\,3\,(1\frac{1}{2}x + 1 + 2)\,]}{h} - \frac{[\,3\,(-4\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}y + 7\frac{1}{2})\,]}{h} = 0,$$
$4x - y = 3$,
yang memberikan $x = \frac{23}{6}$ dan $y = \frac{74}{6} = \frac{37}{3}$.

§ 7. Analisa Momen

Dalam bulan Januari 1938 Stewart menerbitkan tulisan, yang di dalamnya ia gunakan faktor-faktor-lenturan guna analisa momen dalam konstruksi-konstruksi-kontinu ("Relative flexure-factors for

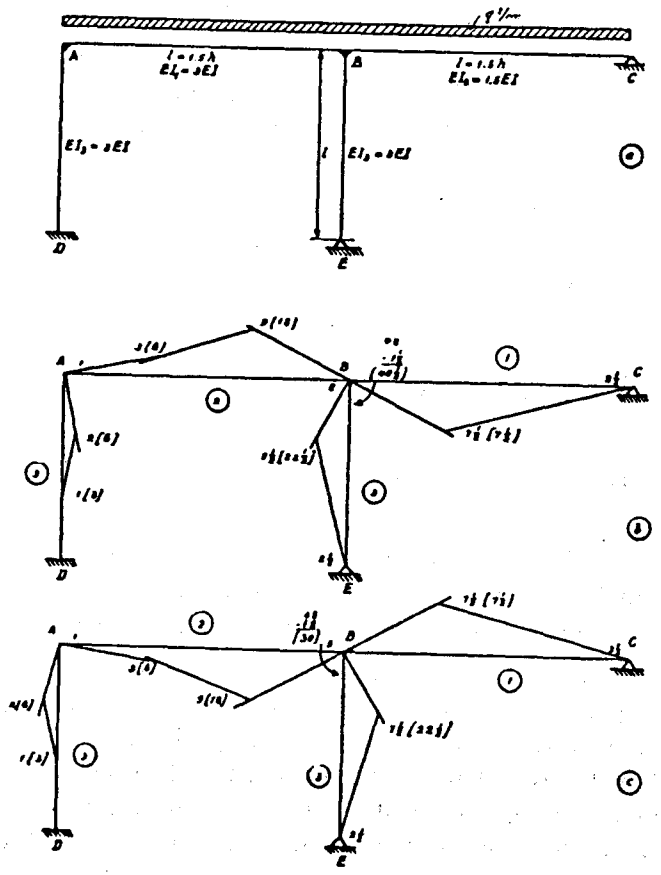
analysing continuous structures" by Ralph W. Stewart, Proceedings Inst. Civ. Eng. January 1938). Dalam bulan Maret 1940 penulis-pertama buku ini menggunakan faktor-faktor-lenturan untuk analisa garis-pengaruh, titik-titik-tetap, momen-momen dan lendutan-lendutan ("Berekening van vaste punten, invloedslynen, momentenvlakken en doorbuigingen by portaalconstructies en doorgaande liggers met de metode der doorbuigingsfactoren", door H. Johannes, De Ingenieur in Ned. Indie, Maart 1940).

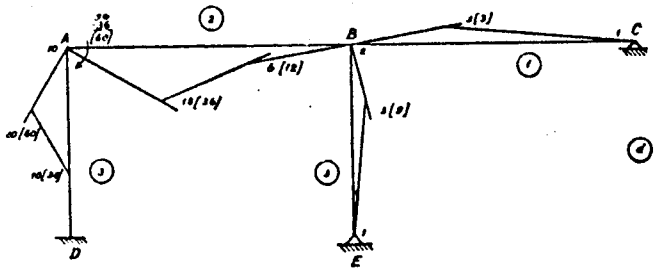
Analisa momen dengan faktor-lenturan, seperti yang disajikan dalam tulisan Stewart, menunjukkan sifat-ciri dari distribusi momen-momen-jepit dengan prosedur lain daripada dalam metode Cross dari distribusi-momen. Meskipun untuk analisa momen penulis-penulis lebih suka menggunakan faktor-lenturan secara terapan lebih langsung, seperti yang akan ditunjukkan lebih lanjut, sifat-ciri-asli metodenya patut diuraikan di sini.

Cara faktor-lenturan mudah untuk kasus-kasus pembebanan, yang menghasilkan variasi-momen-linier, karena segibanyak-batang-elastiknya kemudian mudah dilukis dan faktor-faktor-lenturan mudah dihitung. Pada analisa titik-titik-tetap dan garis-garis-pengaruh variasi-momen-linier segera terjadi. Pada analisa momen, yang disebabkan oleh sebarang pembebanan, pembebanan ini diuraikan dalam beberapa kasus-elementer/sederhana dari pembebanan, yang menghasilkan variasi-momen-linier dalam bentangan-bentangan-nya.

Experiment (yang dibayangkan) berikut ini dapat dilaksanakan. Semua titiksimpul dari bagian-bagian-konstruksi yang dibebani dipegang-erat secara fiktif, kecuali dukungan-dukungan-ujung dari konstruksinya, dan kemudian dibebaskan. Di titik-titik-simpul, yang dipegang-erat, terjadi momen-momen-jepit seperti pada metode distribusi-momen-ujung dari Cross. Pada metode Cross titik-titik-simpul dari bentangan-bentangan yang tak dibebani juga dipegang-erat, sedang pembebasan dari konstruksinya dilaksanakan secara berikut ini. Titik-titik-simpul dibebaskan satu-per-satu berturut-turut dan kemudian dipegang-erat lagi. Bila tiap titik-simpul telah mendapat gilirannya, serangkaian baru dari prosedur-pembebasan dilaksanakan dan seterusnya sampai kesemua momen-jepit telah didistribusikan.

Pada cara faktor-lenturan, yang menggunakan momen-momen-jepit, kesemua titiksimpul, yang dipegang-erat, dibebaskan seketika. Keadaan-akhir, setelah semua titiksimpul dibebaskan, dapat dipandang sebagai dihasilkan oleh superposisi dari sejumlah kasus-elementer dari pembebanan. Secara berturut-turut suatu momen-jepit diterapkan pada konstruksinya oleh bagian-konstruksinya sendiri. Pada kasus-elementer demikian suatu momen-jepit dipandang ada di sebuah titiksimpul yang dipegang-erat dan kemudian titiksimpulnya dibebaskan. Dengan menggabungkan momen-momen-elementer dihasilkan momen-momen yang diperlukan.





Gambar 1.7.1. a). Kerangka-kontinu dengan beban-terbagi-rata.
b). Kasus-elementer-pembebanan pertama.
c). Kasus-elementer-pembebanan kedua.
d). Kasus-elementer-pembebanan ketiga.

Misalkan bentangan-bentangan AB dan BC dari kerangka-kontinu, yang ditunjukkan dalam Gambar 1.7.1a. mendukung beban-terbagi-rata q t/m. Titik-titik-simpul A dan B dipegang-erat sedemikian, hingga terjadi momen-momen-jepit (primer) berikut :

$$\text{I.}\quad \overline{M}_{bc} = -\frac{1}{8}\,ql^2\,,$$

$$\text{II.}\quad \overline{M}_{ba} = +\frac{1}{12}\,ql^2\,,$$

$$\text{III.}\quad \overline{M}_{ab} = -\frac{1}{12}\,ql^2\,.$$

Aturan tanda-momen yang digunakan sebagai berikut : mom-jepit (primer) adalah positif, bila ujung-balok akan memutar titiksimpulnya dalam arah berlawanan dengan arah-putar jarum-jam.

Pembebanan yang sebenarnya telah diuraikan dalam tiga kasus-elementer pembebanan. Setelah pembebasan titik-titik-simpul yang berkepentingan, segibanyak-batang-elastiknya dilukis (Gambar 1.7.1b, 1.7.1c dan 1.7.1d). Hitungan dari faktor-faktor-lenturan berjalan dari ujung-ujung-terjauh konstruksinya ke titiksimpul yang bersangkutan. Faktor-faktor-momen, yaitu faktor-faktor-lenturan kali nilai-banding-kekakuan, tertulis pada gambar dalam kurung.

Pada Gambar 1.7.1b. tampak, bahwa momen-extern, yang sama dengan momen-jepit $\overline{M}_{bc} = \frac{1}{8}\,ql^2$, diimbangi oleh momen-momen-lawan $M_{ba'}$, $M_{be'}$ dan $M_{bc'}$, yang digambarkan oleh faktor-faktor-momen berturut-turut 18, 22½ dan 7½, sehingga $\frac{1}{8}\,ql^2$ digambarkan oleh faktor-momen = 18 + 22½ + 7½ = 48. Dalam kasus ini momen $\overline{M}_{bc}$ tidak diterapkan secara extern, tetapi secara intern melalui balok BC sendiri. Dalam hal ini momen-lawan M_{bc} digambarkan oleh :

$$M_{bc} = \overline{M}_{bc} - M_{bc'} = 48 - 7\tfrac{1}{2} = 40\tfrac{1}{2}.$$

Faktor-faktor-momen lainnya tetap tinggal sama, maka :

$$M_{be} = M_{be'} = 22\tfrac{1}{2}\,,$$
$$M_{ba} = M_{ba'} = 18\,,\ \text{dan seterusnya.}$$

Karena $\frac{1}{8}\,ql^2$ diwakili oleh faktor-momen 48, momen-momen-lawan, yang diperlukan di titik-simpul, diperoleh dengan mengalikan faktor-faktor-momennya dengan $\frac{1}{48}\cdot\frac{1}{8}\,q\,l^2$. Diperoleh nilai-nilai-mutlak :

$$M_{ad}^{-} = \frac{6}{48}\cdot\frac{1}{8}\,ql^2 = \frac{1}{64}\,ql^2\,,$$

$$M_{ab}^{+} = M_{ad}^{-} = \frac{1}{64}\,ql^2\,,$$

$$M_{da}^{-} = \tfrac{1}{2}M_{ad} = \frac{1}{128}\,ql^2\,,$$

$$M_{ba}^{+} = \frac{18}{48}\cdot\frac{1}{8}\,ql^2 = \frac{3}{64}\,ql^2\,,$$

$$M_{be}^{+} = \frac{22\frac{1}{2}}{48}\cdot\frac{1}{8}\,ql^2 = \frac{15}{256}\,ql^2\,,$$

$$M_{bc}^{-} = \frac{40\frac{1}{2}}{48} \cdot \frac{1}{8}\, ql^2 = \frac{27}{256}\, ql^2 .$$

Metode faktor-lenturan mempunyai keuntungan, bahwa oleh setiap pembebanan sebarang dari bentangan BC atau kolom BE hitungan yang sama dari Gambar 1.7.1b. dapat digunakan. Momen-momen-lawan diperoleh dengan mengalikan momen-momen-jepit dengan koefisien-koefisien, yang terbaca dari gambarnya. Dengan metode Clapeyron sekumpulan persamaan serentak baru harus ditulis dan diselesaikan.

Kasus-kasus-elementer II dan III dapat juga segera dihitung (Gambar 1.7.1.c dan 1.7.1.d). Momen-momen-elementer untuk kasus-II diperoleh dengan mengalikan faktor-faktor-momen pada Gambar 1.7.1.c dengan $\frac{1}{48} \cdot \frac{1}{12}\, ql^2$ dan untuk kasus-III dengan mengalikan faktor-faktor-momen pada Gambar 1.7.1.d dengan $\frac{1}{96} \cdot \frac{1}{12}\, ql^2$.

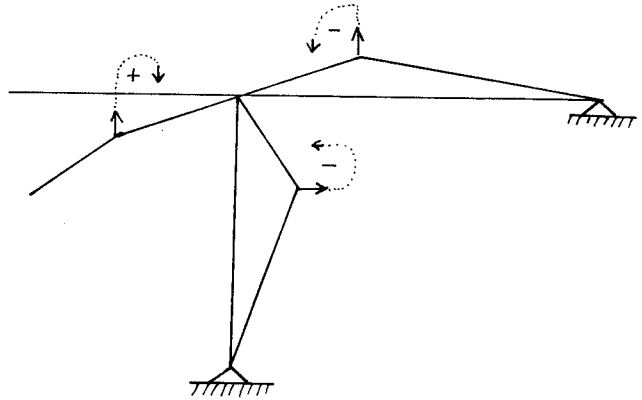
Momen-momen-akhir yang dihasilkan diperoleh dengan penjumlahan momen-momen-elementer dari ketiga kasus. Hal ini dilakukan secara mudah dalam bentuk daftar (Daftar II).

Tanda dari momen-lawan ditetapkan secara sebagai berikut ini. Beban-kedua pada puncak dari segibanyak-batang-elastik diberi anak-panah, yang kemudian berputar menuju titiksimpul yang bersangkutan. Tanda momen dianggap positif, bila arah-putar anak-panahnya searah dengan arah-putar jarum-jam. Tanda momen dianggap negatif, bila arah-putar anak-panahnya berlawanan arah dengan arah-putar jarum-jam. Hal ini dilukiskan pada gambar 1.7.2.

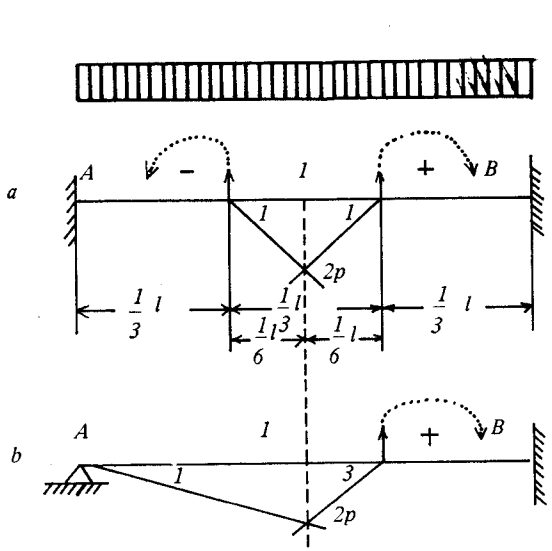
Penerapan faktor-faktor-lenturan dalam arti dari distribusi momen-momen-jepit (primer) merupakan salah satu ciri saja dari metodenya. Metodenya dapat digunakan secara penerapan lebih langsung. Beberapa contoh sekarang akan disajikan. Contoh-contoh lagi akan diberikan di § 9.

Daftar II. Momen-akhir ($.ql^2$)

Momen / Gambar	M_{da}	M_{ad}	M_{ab}	M_{ba}	M_{be}	M_{bc}
1.7.1.b.	$-\frac{1}{128}$	$-\frac{1}{64}$	$+\frac{1}{64}$	$+\frac{3}{64}$	$+\frac{15}{256}$	$-\frac{27}{256}$
1.7.1.c.	$+\frac{1}{192}$	$+\frac{1}{96}$	$-\frac{1}{96}$	$+\frac{5}{96}$	$-\frac{5}{128}$	$-\frac{5}{384}$
1.7.1.d.	$+\frac{5}{192}$	$+\frac{5}{96}$	$-\frac{5}{96}$	$+\frac{1}{96}$	$-\frac{1}{128}$	$-\frac{1}{384}$
jumlah	$+\frac{3}{128}$	$+\frac{3}{64}$	$-\frac{3}{64}$	$+\frac{7}{64}$	$+\frac{3}{256}$	$-\frac{31}{256}$



Gambar 1.7.2. Tanda momen.



Gambar 1.7.3. Segibanyak-batang pada balok dijepit kedua ujungnya (a) dan satu ujung dijepit dengan ujung lain bersendi (b).

Contoh (1).

Gambar 1.7.3.a. melukiskan balok dengan kedua ujungnya terjepit, yang mendukung beban-terbagi-rata q t/m pada seluruh bentangannya.

Nilai-banding-kekakuan $k' = 1$.
Dari gambarnya didapat $2p = 2$.

Dari persamaan (14) diperoleh $[\ 2p \cdot k'\ ] = \frac{1}{6} ql^2$,

$[\ 2\ ] = \frac{1}{6} ql^2$,

$[\ 1\ ] = \frac{1}{12} ql^2$.

Jadi $M_{ab}^{-} = M_{ba}^{+} = [\ 1\ ] = \frac{1}{12} ql^2$.

Gambar 1.7.3.b. menunjukkan balok dengan sendi di A dan terjepit-sempurna di B, yang mendukung beban-berbagi-rata q t/m pada seluruh bentangannya.

Dari gambarnya didapat : $2p = 3 + 1 = 4$.

Dari persamaan (14) diperoleh : $[\ 2p \cdot k'\ ] = \frac{1}{6} q l^2$,

$[\ 4\ ] = \frac{1}{6} ql^2$,

$[\ 1\ ] = \frac{1}{24} ql^2$.

Jadi $M_{ba}^{+} = [\ 3\ ] = \frac{1}{8} ql^2$.

Contoh (3).

Jika balok pada Gambar 1.7.3.a, yang terjepit kedua ujungnya, mendukung sebuah beban-terpusat P, maka segibanyak-batang-elastiknya tetap sama.

Dari persamaan (15a) diperoleh : $[\ 2p \cdot k'\ ] = \frac{Pl}{4}$,

$[\ 2\ ] = \frac{1}{4} Pl$.

Jadi $M_{ab}^{-} = M_{ba}^{+} = [\ 1\ ] = \frac{1}{8} Pl$,

Contoh (4).

Jika balok pada Gambar 1.7.3.b, yang bersendi di A dan terjepit-sempurna di B, mendukung suatu beban-terpusat P, maka segibanyak-batang-elastiknya tetap sama.

Dari persamaan (15a) didapat : $[\ 2p \cdot k'\ ] = \frac{Pl}{4}$,

$$[\,4\,] = \frac{Pl}{4},$$

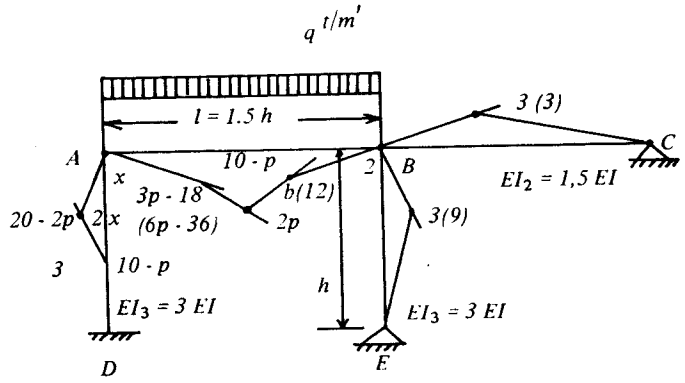
$$[\,1\,] = \frac{1}{16}Pl.$$

Jadi $M^{+}_{ba} = [\,3\,] = \frac{3}{16}Pl$.

Contoh (5).

Gambar 1.7.4. melukiskan konstruksi yang sama dari Gambar 1.5.1, yang mendukung suatu beban-terbagi-rata q t/m sepanjang seluruh bentangan AB. Kasus-pembebanan ini tidak diuraikan menjadi kasus-kasus-elementer, tetapi segibanyak-batang-elastiknya digambar untuk keseluruhan beban yang sebenarnya. Hitungannya dimulai dari sebelah-kanan ke sebelah-kiri, pada bentangan AB digunakan hubungan-hubungan dari kasus 7, §4. Bilangan-bilangan dalam kurung merupakan faktor-faktor-momen. Syarat keseimbangan-momen di titiksimpul A menghasilkan :

$$(20 - 2p) \,.\, 3 = (3p - 18) \,.\, 2$$
$$60 - 6p = 6p - 36$$
$$p = 8.$$



Gambar 1.7.4. Kerangka-kontinu dengan beban-terbagi-rata q t/m pada bentangan AB.

Dari persamaan (14) diperoleh : $[\,2p \,.\, k'\,] = \frac{1}{6}\,ql^2$,

$$[\,32\,] = \frac{1}{6}\,ql^2\,,$$

$$[\,1\,] = \frac{1}{192}\,ql^2.$$

Jadi momen-momen yang dibutuhkan dalam nilai-mutlak :

$$M^{+}_{da} = [\,(10 - p) \,.\, 3\,] = [\,6\,] = \frac{6}{192}\,ql^2,$$

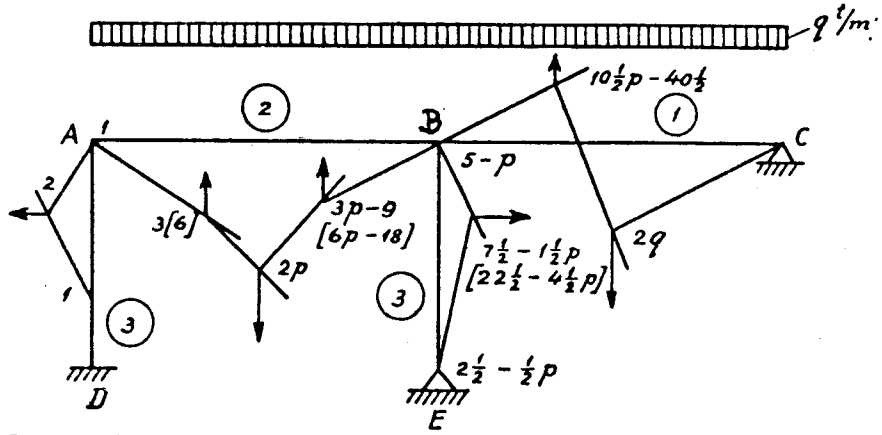
$$M^{+}_{ad} = M^{-}_{ab} \quad (= 2\,M^{+}_{da}) = \frac{12}{192}\,ql^2,$$

$$M^{+}_{ba} = [\,12\,] = \frac{12}{192}\,ql^2,$$

$$M^{-}_{be} = [\,9\,] = \frac{9}{192}\,ql^2,$$

$$M^{-}_{bc} = [\,3\,] = \frac{3}{192}\,ql^2.$$

Contoh (6).



Gambar 1.7.5. Beban-terbagi-rata q t/m pada bentangan AB dan BC.

Gambar 1.7.5. menunjukkan kerangka yang sama dari contoh terdahulu, tetapi sekarang bentangan-bentangan AB dan BC diberi beban-terbagi-rata q t/m. Untuk menyelesaikan kasus ini dapat dihitung momen-momen, yang disebabkan oleh pembebanan bentangan BC saja, dan mengadakan superposi momen-momen ini pada momen-momen, yang telah didapat di contoh terdahulu.

Tetapi misalkan diminta suatu hitungan sekaligus. Pertama hubungan antara p dan q dapat diperoleh sebagai berikut ini .

Dari persamaan (15) didapat : $[\ 2p\ .\ k_1{}^1\ ] = \frac{1}{6}\ ql^2$,

$$[\ 2q\ .\ k_2{}^1\ ] = \frac{1}{6}\ ql^2.$$

Jadi
$$\begin{aligned} 2p\ .\ k_1{}^1 &= 2q\ .\ k_2{}^1, \\ 2p\ .\ 2 &= 2q\ .\ 1, \\ 2q &= 4p. \end{aligned}$$

Hitungannya berjalan dari sebelah-kiri ke sebelah-kanan. Sesampai di bentangan BC syarat berikut dapat ditulis :

$$\begin{aligned} 1\tfrac{1}{2}\ .\ 2q &= 2\ (10\tfrac{1}{2}p - 40\tfrac{1}{2}) - 3\ (5 - p) \\ 6p &= 21p - 81 - 15 + 3p \\ p &= 5\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Pengisian dalam $[\ 2p\ .\ k'\ ] = \frac{1}{6}\ ql^2$ memberikan

$$[\ 2\ .\ 5\frac{1}{3}.\ 2\ ] = \frac{1}{6}\ ql^2,$$

$$[\ 1\ ] = \frac{1}{128}\ ql^2.$$

Maka momen-momen yang dibutuhkan dalam nilai-mutlak :

$$M_{da}^{+} = [\ 3\ ] = \frac{3}{128}\ ql^2,$$

$$M_{ab}^{-} = M_{ad}^{+} = [\ 6\ ] = \frac{6}{128}\ ql^2 = \frac{3}{64}\ ql^2,$$

$$M_{ba}^{+} = [\ 6p - 18\ ] = [\ 14\ ] = \frac{14}{128}\ ql^2 = \frac{7}{64}\ ql^2,$$

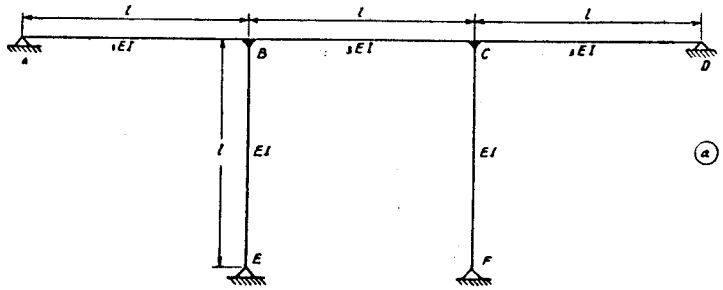
$$M_{be}^{+} = [\ 22\tfrac{1}{2} - 4\tfrac{1}{2}p)\ ] = [\ -1\tfrac{1}{2}\ ] = \frac{1\frac{1}{2}}{128}\ ql^2 = \frac{3}{256}\ ql^2,$$

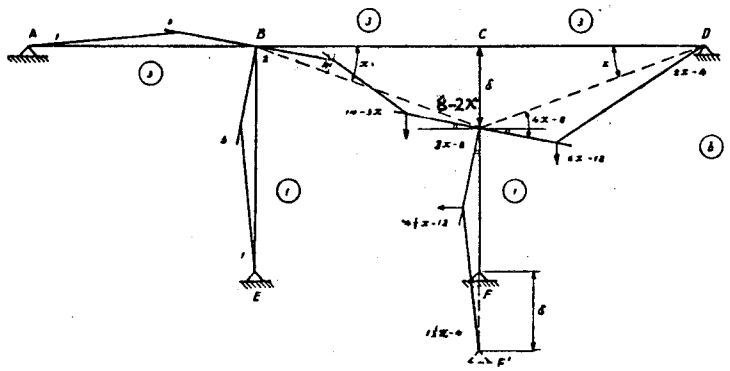
$$M_{bc}^{-} = [\ 10\tfrac{1}{2}p - 40\tfrac{1}{2}\ ] = [\ 15\tfrac{1}{2}\ ] = \frac{15\frac{1}{2}}{128}\ ql^2 = \frac{31}{256}\ ql^2,$$

Hasil ini cocok dengan yang terdapat pada Daftar II.

Faktor-momen dan faktor-lenturan M_{be}, yang terdapat negatif, merupakan petunjuk, bahwa pelenturan kolom BE, jadi putaran titiksimpul B, seperti yang dilukiskan di gambarnya, harus dibalik. Tetapi ketidaktepatan anggapan awal tentang arah pelenturan kolom BE tidak mempengaruhi hasil hitungannya. Secara otomatik hal itu terungkap, sehingga memberikan gambaran yang jelas dalam pelenturan yang benar dari konstruksinya. Dengan bantuan rumus (16) dan rumus (17) dan faktor-lenturan, yang terbaca dari gambarnya, kurve-elastiknya dapat dihitung secara tepat. Hal ini akan ditinjau dalam pasal berikut .

Contoh (7).





Gambar 1.7.6. a. Kerangka-kontinu.
b. Segibanyak-batang-elastik pada lendutan-pampat sendi F.

Kerangka-kontinu, yang tertera pada Gambar 1.7.6, mempunyai bentangan–bentangan sama panjang l. Nilai-nilai-EI dari balok-balok tiga kali dari kolom-kolom. Oleh suatu lendutan-pampat sendi-F turun sedalam δ. Dengan ketentuan $\frac{18.EI.\delta}{l^2} = 2$ tm diminta besar momen-momen dari konstruksinya.

Kekakuan kolom $= \frac{2\ EI}{l}$, nilai-banding-kekakuan = 1, kekakuan balok $= \frac{2\ .\ 3\ EI}{l}$, nilai-banding-kekakuan = 3.

Setelah digambar segibanyak-batang-elastiknya, hitungan dari faktor-faktor-lenturan dilaksanakan dari sebelah-kiri ke sebelah-kenan dengan $x = \frac{\delta}{l}$ sebagai anu-awal.

Dengan syarat keseimbangan-momen di C terdapat :

$$(14 - 3x)\ .\ 3 = (4\tfrac{1}{2}x - 12)\ .\ 1 - (6x - 12)\ .\ 3$$

$$x = \frac{20}{7} = \frac{\delta}{l}\ .$$

$$\left[\ x\ .\ \frac{2\ EI}{l}\ \right] = \left[\ \frac{\delta}{l}\ .\ \frac{2\ EI}{l}\ \right] = \frac{2}{9}\ \text{tm},$$

$$[\ x\ .\ k\ ] = \left[\ \frac{20}{7}\ .\ 1\ \right] = \frac{2}{9}\ \text{tm},$$

$$[\ 1\ ] = \frac{7}{90}\ \text{tm}.$$

Maka nilai-mutlak :

$$M^{+}_{ba} = [\ 9\ ] = \frac{7}{10}\ \text{tm},$$

$$M^{+}_{be} = [\ 3\ ] = \frac{7}{30}\ \text{tm},$$

$$M^{-}_{bc} = [\ 12\ ] = \frac{14}{15}\ \text{tm},$$

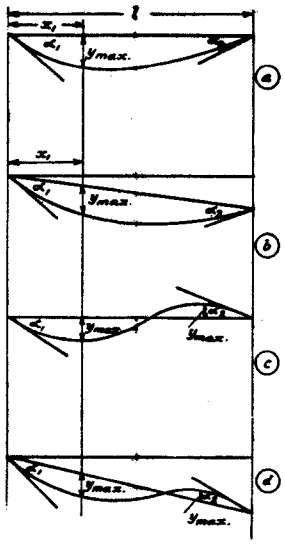
$$M^{-}_{cb} = \left[\ \frac{3\ (14\ .\ 7 - 60)}{7}\ \right] = 1\ \frac{4}{15}\ \text{tm},$$

$$M^{+}_{cf} = \left[\ \frac{90 - 12\ .\ 7}{7}\ \right] = \frac{1}{15}\ \text{tm},$$

$$M^{+}_{cd} = \left[\ \frac{3\ (120 - 12\ .\ 7)}{7}\ \right] = 1\frac{1}{5}\ \text{tm}.$$

§ 8. **Analisa lendutan.**

Syarat satu-satunya dalam penjabaran rumus (16) dan (17) ialah, bahwa momen-momen berubah secara linier, sehingga rumusnya jelas berlaku untuk semua bagian dari kurve-elastiknya, bila hal tadi betul.



Gambar 1.8.1. Kurve-elastik pada berbagai keadaan α_1 dan α_2.

α_1 dan α_2 merupakan sudut-sudut antara garis-singgung di ujung-ujung dari bagian-bagian yang bersangkutan dan garis-garis yang menghubungkan ujung-ujung ini.

y merupakan ordinat diukur dari garis-hubungnya. Jika untuk suatu konstruksi diagram-momennya telah ditetapkan dan diinginkan untuk mengetahui lendutan-lendutannya, maka dengan menerapkan rumus (16) atau (17) kurve-elastik untuk bentangan-bentangan, yang tidak dibebani, diperoleh. Sudut-sudut lereng-ujung α_1 dan α_2 dapat segera dihitung dari momen-momen-ujungnya. Misalkan momen-ujung-kiri sebesar $-M_1$ dan momen-ujung-kanan sebesar $+M_2$, maka :

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{-M_1 l}{3\,EI} + \frac{M_2 l}{6\,EI} \\ \alpha_2 &= \frac{-M_1 l}{6\,EI} + \frac{M_2 l}{3\,EI} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

Bila diagram-momennya dianalisa dengan faktor-faktor-lenturan, maka sudut-sudut-lereng-ujung segera diperoleh dari faktor-faktor-lenturan-relatifnya, apabila dari penentuan nilai-benar dari salah satu sudut diketahui konstante-bandingnya.

Misalkan diinginkan *lendutan maximum* saja pada bentangan-bentangan yang tidak dibebani, maka $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi lendutannya dijadikan sama dengan nol : $\frac{dy}{dx} = 0$.

Dari persamaan (17) :

$$y = \frac{\alpha_1}{l^2}(l - x)^2 + \frac{\alpha_2}{l^2} x^2 (l - x)$$

atau
$$y = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{l^2} x^3 - \frac{2\alpha_1 - \alpha_2}{l} x^2 + \alpha_1 x \quad \ldots\ldots\ldots (21)$$

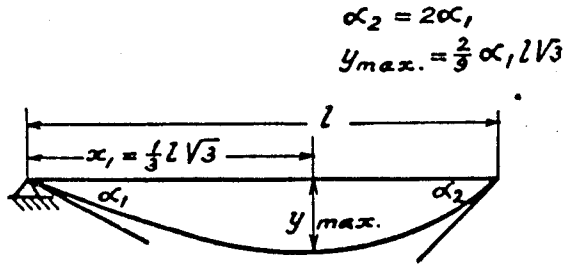
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(\alpha_1 - \alpha_2)}{l^2} x^2 - \frac{2(2\alpha_1 - \alpha_2)}{l} x + \alpha_1 = 0.$$

Pemecahan persamaan-kuadrat ini menghasilkan :

$$x_{1,2} = \frac{(2\alpha_1 - \alpha_2)l \pm l\sqrt{\alpha_1^2 - \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2}}{3(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

yang memberikan letak titik-titik dari lendutan maximum. Pengisian akar-akar $x_{1,2}$ dalam persamaan (17) atau (21) memberikan ordinat-ordinat maximum yang diinginkan.

Dapat diperhatikan, bahwa ini mengenai nilai-nilai-ortogonal dari sudut-sudut, sehingga titik-extrimnya ditentukan oleh suatu garissinggung sejajar dengan garis yang menghubungkan ujung-ujung baloknya. Garissinggung ini tidak perlu sejajar dengan sumbu-X (Gambar 1.8.1.).



Gambar 1.8.2. Lendutan-maximum dengan salah satu ujung-balok bersendi.

Jika salah satu ujung-balok bersendi atau terjepit, maka didapat rumus-rumus yang lebih sederhana. Dengan salah satu ujung-balok berupa *sendi*, maka $\alpha_2 = 2\alpha_1$ (Gambar 1.8.2.) dan persamaan (21)

menjadi : $$y = -\frac{\alpha_1}{l^3} x^3 + \alpha_1 . x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

yang memberikan $$\frac{dy}{dx} = -\frac{3\alpha_1}{l^3} x^2 + \alpha_1 = 0$$

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{3} l\sqrt{3} \ ,$$

$$x_2 = -\frac{1}{3} l\sqrt{3} \quad \text{tidak dapat digunakan,}$$

$$x_1 = +\frac{1}{3} l\sqrt{3}.$$

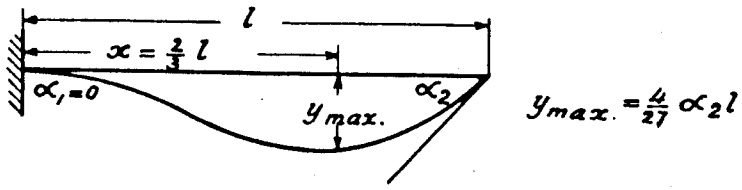
Lendutan-maximum terjadi pada jarak $\frac{1}{3} l\sqrt{3}$ dari sendinya, nilainya

$$y_{max} = -\alpha_1 . \frac{1}{3} l\sqrt{3} + \alpha_1 . \frac{1}{3} l\sqrt{3}$$

$$= \frac{2}{9}\alpha_1 l\sqrt{3}.$$

$$= \frac{1}{27}\sqrt{3}. \frac{M_2 l^2}{EI}$$

[dengan $M_1 = 0$, sehingga $2\alpha_1 = \alpha_1 = \frac{M_2 l}{3\,EI}$ di persamaan-persamaan (20)]



Gambar 1.8.3. Lendutan-max dengan salah satu ujung-balok terjepit.

Jika salah satu ujung-balok terjepit (Gambar 1.8.3.), maka $\alpha_1 = 0$

dan $$y = \frac{\alpha_2}{l^2} . x^2 (l - x),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha_2}{l^2} (2xl - 3x^2) = 0,$$

$$x_2 = 0, \quad x_1 = \frac{2}{3} l.$$

Lendutan-maximum terjadi pada jarak $\frac{2}{3} l$ dari ujung-jepitnya, nilainya :

$$y_{max} = \frac{4}{27}\alpha_2 l$$

$$= \frac{1}{27} \frac{M_2 l^2}{EI}$$

[dengan $\alpha_1 = 0$, $M_1 = \frac{1}{2} M_2$, $\alpha_2 = \frac{M_2\, l}{4\, EI}$ di persamaan-persamaan (20)] .

Untuk mendapatkan kurve-elastiknya untuk suatu bentangan yang dibebani lendutannya dapat dipandang sebagai superposisi dari :

I. lendutan y' dari bagian-konstruksinya disebabkan oleh diagram-momen-linier yang menahan,

II. lendutan y'' dari bagian-konstruksinya, bila terletak di atas dua perletakan (sebagai balok-sederhana) dan dikenai pembebanan yang ditetapkan.

y' harus diperoleh lagi dari rumus (16) atau (17).

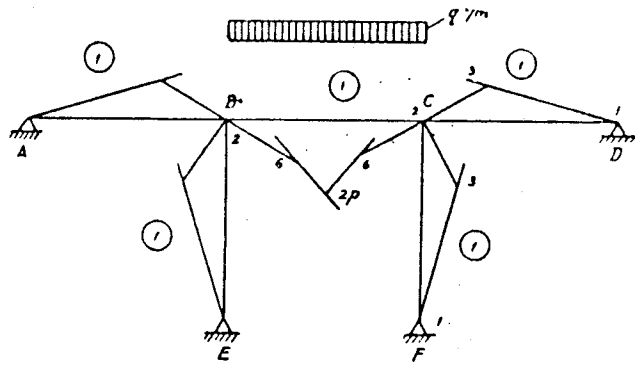
y'' harus dihitung sebagai diagram-momen-kedua yang dihasilkan oleh beban-keduanya atau diagram-momen-pertama yang direduksikan. Untuk suatu bentangan, yang mendukung suatu beban-terbagi-rata, didapat:

$$y'' = \frac{qx\,(l - x)}{24\, EI} \left\{ l^2 + x\,(l - x) \right\} .$$

Rumus ini dan rumus-rumus lain untuk berbagai jenis pembebanan merupakan rumus-rumus yang terdapat dalam banyak buku-buku-pegangan.

§9. Contoh-contoh analisa berbagai konstruksi.

Contoh (1).



Gambar 1.9.1. Kerangka-kontinu dengan beban-terbagi-rata di bentangan BC.

Kerangka-kontinu yang terlukis pada Gambar 1.9.1. mempunyai kolom-kolom dan balok-balok dari kekakuan sama. Dengan menghitung faktor-faktor-lenturan kemudian p didapat dari syarat-geometri dalam bentangan BC.

$$2 \cdot \frac{2}{3} l + 6 \cdot \frac{2}{3} l - 2 \cdot \frac{1}{3} l = 2p \cdot \frac{1}{6} l$$

$$4 + 6 - 2 = p$$

$$p = 8.$$

Hasil ini dapat juga diperoleh dengan menggunakan hubungan : $p = \alpha + \beta$, yang dijabarkan di §4 Kasus (8). Hubungan dapat juga dijabarkan menurut cara berikut ini.

Garisbagi sudut 2p horisontal. Maka oleh penjumlahan sudut-sudut : $\alpha + \beta - p = 0$.

Jadi $p = \alpha + \beta$,

$p = \alpha + \beta = 2 + 6 = 8$.

$$[\,2p\,.\,1\,] = [\,16\,] = \frac{1}{6} q l^2$$

$$[\,1\,] = \frac{1}{96}\, q l^2 .$$

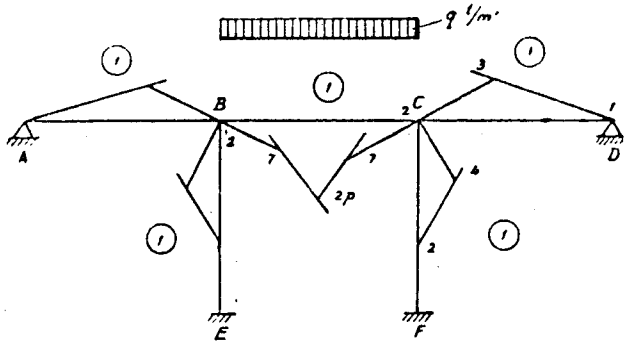
Nilai-mutlak :

$$M^{-}_{cd} = M^{+}_{ba} = [\,3\,] = \frac{1}{32}\, q l^2 ,$$

$$M^{-}_{cf} = M^{+}_{be} = [\,3\,] = \frac{1}{32}\, q l^2 ,$$

$$M^{+}_{cb} = M^{-}_{bc} = [\,6\,] = \frac{1}{16}\, q l^2 .$$

Contoh 2.



Gambar 1.9.2. Kerangka-kontinu (E dan F terjepit) dengan beban-terbagi-rata di bentangan BC.

Setelah dipecahkan soal, yang dilukiskan di Gambar 1.9.2, kemudian dari syarat-geometri dalam bentangan BC diperoleh :

$$p = \alpha + \beta = 2 + 7 = 9,$$

$$[\,2p + 1\,] = [18] = \frac{1}{6}\, q l^2 ,$$

$$[\,1\,] = \frac{1}{108}\, q l^2 .$$

Nilai-mutlak :

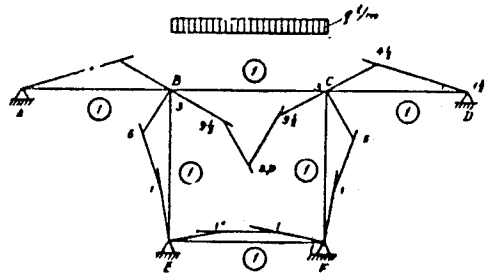
$$M^{-}_{cd} = M^{+}_{ba} = [\,3\,] = \frac{1}{36}\, q l^2 ,$$

$$M^{-}_{cf} = M^{+}_{be} = [\,4\,] = \frac{1}{27}\, q l^2 ,$$

$$M^{+}_{cb} = M^{-}_{bc} = [\,7\,] = \frac{7}{108}\, q l^2 ,$$

$$M^{-}_{fc} = M^{+}_{eb} = [\,2\,] = \frac{1}{54}\, q l^2 .$$

Contoh 3.



Gambar 1.9.3. Kerangka-kontinu (dengan barang-sambung EF) dengan beban-terbagi-rata di bentangan BC.

Setelah dipecahkan soal, terlukis pada Gambar 1.9.3, kemudian dari syarat-geometri di bentangan BC diperoleh :

$$p = \alpha + \beta = 3 + 9\tfrac{1}{2} = 12\tfrac{1}{2},$$

$$[\,2p\,.\,1\,] = [\,25\,] = \frac{1}{6}\, q l^2 ,$$

$$[\,1\,] = \frac{1}{150}\, q l^2 .$$

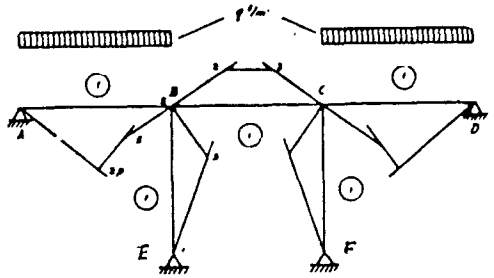
Nilai-mutlak : $M^{-}_{cd} = M^{+}_{bc} = [\,4\tfrac{1}{2}\,] = \frac{3}{100} ql^2$,

$M^{+}_{cb} = M^{-}_{bc} = [\,9\tfrac{1}{2}\,] = \frac{19}{300} ql^2$,

$M^{-}_{cf} = M^{+}_{be} = [\,5\,] = \frac{1}{30} ql^2$,

$M^{+}_{cb} = M^{-}_{fc} = M^{-}_{ef} = M^{+}_{fe} = [\,1\,] = \frac{1}{150} ql^2$.

Contoh (4).



Gambar 1.9.4. Kerangka-kontinu dengan beban-terbagi-rata di bentangan-bentangan-luar.

Setelah dipecahkan soal, terlukis di Gambar 1.9.4, kemudian dari syarat-geometri di bentangan AB diperoleh :

$$5 \cdot \frac{2}{3} l + 2 \cdot l = 2p \cdot \tfrac{1}{2} l,$$

$$p = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}.$$

$$[\,2p \cdot 1\,] = [\,10\tfrac{2}{3}\,] = \frac{1}{6} ql^2.$$

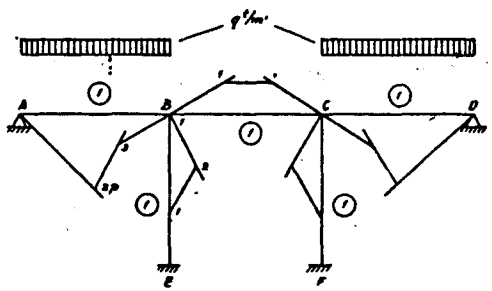
$$[\,1\,] = \frac{1}{64} ql^2.$$

Nilai-mutlak : $M^{-}_{cd} = M^{+}_{ba} = [\,5\,] = \frac{5}{64} ql^2$,

$M^{+}_{cf} = M^{-}_{be} = [\,3\,] = \frac{3}{64} ql^2$,

$M^{-}_{bc} = M^{+}_{cb} = [\,2\,] = \frac{1}{32} ql^2$.

Contoh (5).



Gambar 1.9.5. Kerangka-kontinu (E dan F terjepit) dengan beban-terbagi-rata di bentangan-bentangan-luar.

Setelah dipecahkan soal, terlukis di Gambar 1.9.5, kemudian dari syarat-geometri di bentangan AB diperoleh :

$$3 \cdot \frac{2}{3} l + 1 \cdot l = 2p \cdot \tfrac{1}{2} l,$$

$$p = 3,$$

$$[\,2p \cdot 1\,] = [\,6\,] = \frac{1}{6} ql^2,$$

$$[\ 1\ ] = \frac{1}{36}\, q l^2 .$$

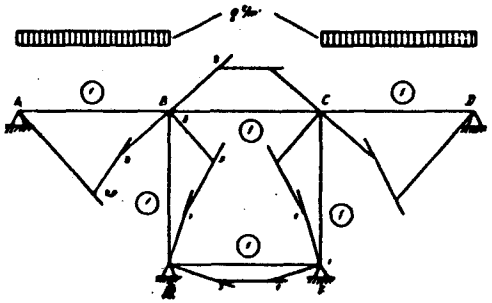
Nilai-mutlak : $M^{-}_{cd} = M^{+}_{ba} = [\ 3\ ] = \frac{1}{12}\, q l^2 .$

$$M^{+}_{cf} = M^{-}_{be} = [\ 2\ ] = \frac{1}{18}\, q l^2 ,$$

$$M^{+}_{fc} = M^{-}_{eb} = [\ 1\ ] = \frac{1}{36}\, q l^2 ,$$

$$M^{-}_{bc} = M^{+}_{cb} = [\ 1\ ] = \frac{1}{36}\, q l^2 .$$

Contoh (6).



Gambar 1.9.6. Kerangka-kontinu (dengan batang-sambung EF) dengan beban-terbagi-rata di bentangan-bentangan-luar.

Setelah dipecahkan soal, terlukis pada Gambar 1.9.6, kemudian dari syarat-syarat geometri di bentangan AB :

$$8 \cdot \frac{2}{3}\, l + 3\, l = 2p \cdot \tfrac{1}{2}\, l ,$$

$$p = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3} .$$

$$[\ 2p \cdot 1\ ] = [\ 16\tfrac{2}{3}\ ] = \frac{1}{6}\, q l^2 .$$

$$[\ 1\ ] = \frac{1}{100}\, q l^2 .$$

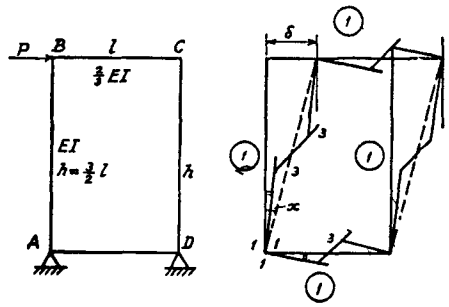
Nilai mutlak : $M^{-}_{cd} = M^{+}_{ba} = [\ 8\ ] = \frac{8}{100}\, q l^2 = \frac{2}{25}\, q l^2 ,$

$$M^{+}_{cf} = M^{-}_{be} = [\ 5\ ] = \frac{5}{100}\, q l^2 = \frac{1}{20}\, q l^2 ,$$

$$M^{+}_{cb} = M^{-}_{bc} = [\ 3\ ] = \frac{3}{100}\, q l^2 ,$$

$$M^{-}_{ef} = M^{+}_{fe} = M^{+}_{fc} = M^{-}_{eb} = [\ 1\ ] = \frac{1}{100}\, q l^2 .$$

Contoh (7).



Gambar 1.9.7. Kerangka-kotak dengan beban-horisontal P di B dan segibanyak-batang-elastiknya.

Kerangka-kotak, terlukis di Gambar 1.9.7, berbentuk simetri, maka segibanyak-batang-elastik liwat titiktengah-titiktengah batang-batang.

Dari gambar terdapat $x = 1 + 1 = 2$.

Dengan menggunakan syarat keseimbangan-horisontal terdapat :

$$\frac{M_{ab} + M_{ba} + M_{dc} + M_{cd}}{h} = P$$

$$[\,3\,.\,1\,+\,3\,.\,1\,+\,3\,.\,1\,+\,3\,.\,1\,] \;=\; \text{Ph}.$$

$$[\,1\,] \;=\; \frac{1}{12}\,\text{Ph}\,.$$

Nilai mutlak :

$$\bar{M}_{ab} = \bar{M}_{ba} = \bar{M}_{dc} = \bar{M}_{cd} = [\,3\,] = \frac{1}{4}\,\text{Ph} \;= \frac{3}{8}\,Pl.$$

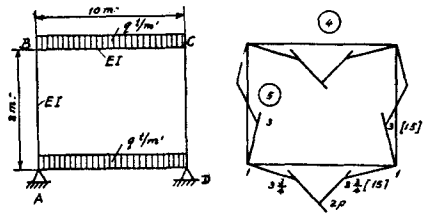
Satuan faktor-momen $\mu = [\,1\,]$ sesuai dengan $\frac{1}{12}\,\text{Ph}$, maka satuan-sudut :

$$(1)_b = \frac{k'.1}{k_b}.\mu \;=\; \frac{1}{k_b}\;.\,\mu \;=\; \frac{h}{2\,EI}.\;\frac{1}{12}\,\text{Ph} \;=\; \frac{1\text{Ph}^2}{24\;EI}$$

(lihat pula pada contoh (9)),

$$(x)_b \;=\; (2)_b = \frac{\delta}{h} \longrightarrow \quad \delta \;=\; (2)_b\,.\,h = \frac{\text{Ph}^3}{12\;EI}\,.$$

Contoh (8).



Gambar 1.9.8. Kerangka-kotak ABCD dengan beban-terbagi-rata pada AD dan BC.

Pada soal, tertera pada Gambar 1.9.8, dari syarat geometri bentangan-AD diperoleh :

$$p \;=\; \alpha \,+\, \beta \;=\; 1 \,+\, 3\,\frac{3}{4}$$

$$p \;=\; 4\,\frac{3}{4}\,.$$

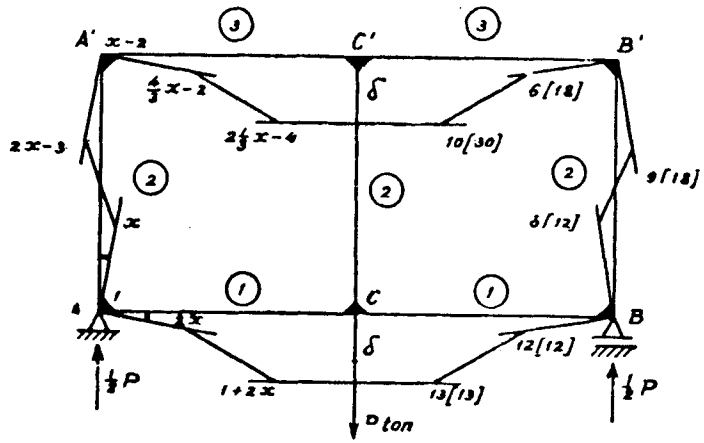
$$[\,2p\,.\,\tfrac{4}{3}\,] \;=\; [\,38\,] \;=\; \frac{1}{6}\;ql^2\,.$$

$$[\;1\;] \;=\; \frac{1}{228}\;ql^2\,.$$

Nilai-mutlak :

$$M_a \;=\; M_b \;=\; M_c \;=\; M_d \;=\; [\,15\,] \;=\; \frac{5}{76}\;ql^2\,.$$

Contoh (9).



Gambar 1.9.9. Kerangka-dua-kotak dengan beban-terpusat-vertikal P di C.

Pada soal, tertera pada Gambar 1.9.9, x diperoleh sebagai berikut ini.

Untuk batang-horisontal-atas terdapat :

$$\delta \;=\; (x-2)\,.\,l \;+\; (\frac{4}{3}\,x-2)\,.\,\frac{2}{3}\,l \;-\; (2\frac{1}{3}\,x-4)\,.\,\frac{1}{3}\,l$$

dan untuk batang-horisontal-bawah :

$$\delta = l + 2x \cdot \frac{2}{3} l - (1 + 2x) \cdot \frac{1}{3} l.$$

Dari kedua persamaan diperoleh :

$$(x-2) + \frac{4}{3}(x-2) \cdot \frac{2}{3} - (2\frac{1}{3}x - 4) \cdot \frac{1}{3} = 1 + 2x \cdot \frac{2}{3} - (1 + 2x) \frac{1}{3},$$

$$x = 6.$$

Syarat keseimbangan-vertikal memberikan :

$$\tfrac{1}{2}P = \frac{[\,18 + 30 + 12 + 13\,]}{l},$$

sehingga :

$$[\,73\,] = \tfrac{1}{2}P \cdot l.$$

$$[\,1\,] = \frac{1}{146} P.l.$$

Maka terdapat nilai-mutlak :

$$M^{-}_{a'c'} = M^{+}_{b'c'} = [\,18\,] = \frac{9}{73} P \cdot l,$$

$$M^{-}_{ac} = M^{+}_{bc} = [\,12\,] = \frac{6}{73} P \cdot l,$$

$$M^{+}_{c'a'} = M^{-}_{c'b'} = [\,30\,] = \frac{15}{73} P \cdot l,$$

$$M^{+}_{ca} = M^{-}_{cb} = [\,13\,] = \frac{13}{146} P \cdot l,$$

$$M_{cc'} = M_{c'c} = 0$$

Lendutan δ didapat secara berikut ini

Dengan μ = momen yang sesuai dengan satuan faktor-momen [1],

k_b = kekakuan-benar = k,

α_b = nilai ortogonal-benar,

k' = nilai-banding kekakuan,

α' = nilai ortogonal-relatif = faktor-lenturan,

$k'\alpha'$ = faktor-momen,

maka $M = k_b \cdot \alpha_b = (k' \cdot \alpha')\,\mu$,

sehingga : $\boxed{\alpha_b = \dfrac{k' \cdot \alpha' \cdot \mu}{k_b}}$

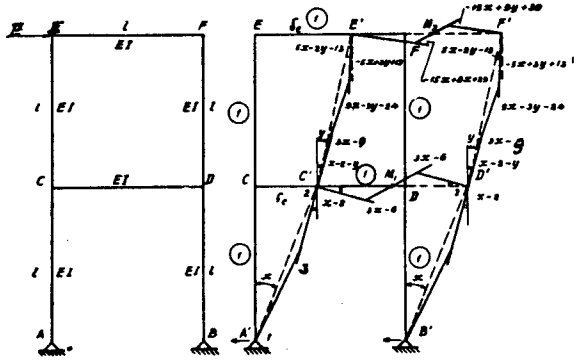
Ini rumus umum, yang harus diterapkan untuk menghitung nilai-nilai yang benar dari sudut-sudut :

$$\delta = (2 + 2x)_b \cdot \frac{1}{3} l = (14)_b \cdot \frac{1}{3} l = \frac{k' \cdot 14}{k_b} \cdot \mu \cdot \frac{1}{3} l,$$

$$\delta = \frac{3 \cdot 14}{2(EI)_{a'c'}/l} \cdot \frac{1}{146} Pl \cdot \frac{1}{3} l = \frac{7}{146} \cdot \frac{Pl^3}{(EI)_{a'c'}},$$

$$\delta = \frac{1 \cdot 14}{2(EI)_{ac}/l} \cdot \frac{1}{146} Pl \cdot \frac{1}{3} l = \frac{7}{438} \cdot \frac{Pl^3}{(EI)_{ac}}$$

Contoh (10).



Gambar 1.9.10. Kerangka-dua-tingkat dengan beban-horisontal P di E.

Kerangka-dua-tingkat, tertera pada Gambar 1.9.10, menerima beban-horisontal P di E. Semua balok dan kolom mempunyai panjang sama 1 dan faktor-kekakuan sama EI terhadap lenturan. Diminta momen-momen dan simpangan-simpangan-horisontal δ_e dan δ_c titik simpul E dan C.

Nilai-banding-kekakuan dari semua batang sama besar = 1. Faktor-faktor-lenturan dihitung dengan $x = \frac{\delta_e}{l}$ dan $y = \frac{\delta_e - \delta_c}{l}$ sebagai anu.

Karena simetri maka reaksi-reaksi-horisontal di perletakan-perletakan-dukung :

$$A_h = B_h = \tfrac{1}{2}P.$$

Keseimbangan-momen terhadap titiksimpul E menghasilkan persamaan :

$$-15x + 9y + 39 = 9x - 3y - 24,$$
$$8x - 4y - 21 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

Keseimbangan-horisontal memerlukan syarat, bahwa pertama :

$$\frac{M_{ca}}{l} = \tfrac{1}{2}P,$$

$$[\ 3\ .\ 1\ ] = \tfrac{1}{2}\ Pl,$$

sehingga : $[\ 1\ ] = \frac{1}{6}\ Pl,$

dan kedua :

$$\frac{M_{ec} + M_{ce}}{l} = \tfrac{1}{2}\ P$$

$$[\ (9x - 3y - 24) + (3x - 9)\ ] = \tfrac{1}{2}\ Pl = [\ 3\ ],$$

maka $4x - y - 12 = 0$ ....(II)

Pemecahan persamaan-persamaan (I) dan (II) menghasilkan : $x = 3\frac{3}{8}$ dan $y = 1\frac{1}{2}$.

$$\bar{M}_{ca} = [\ 3\ ] = \frac{1}{2}\ Pl,$$

$$M^{+}_{cd} = [\ 3\ .\ 3\frac{3}{8} - 6\ ] = \frac{11}{16}\ Pl,$$

$$\bar{M}_{cb} = [\ 3\ .\ 3\frac{3}{8} - 9\ ] = \frac{3}{16}\ Pl,$$

$$\bar{M}_{ec} = [\ 9\ .\ 3\frac{3}{8} - 3\ .\ 1\tfrac{1}{2} - 24\ ] = \frac{5}{16}\ Pl,$$

Maka nilai-mutlak :

yang dapat digunakan untuk melukis diagram-momennya.

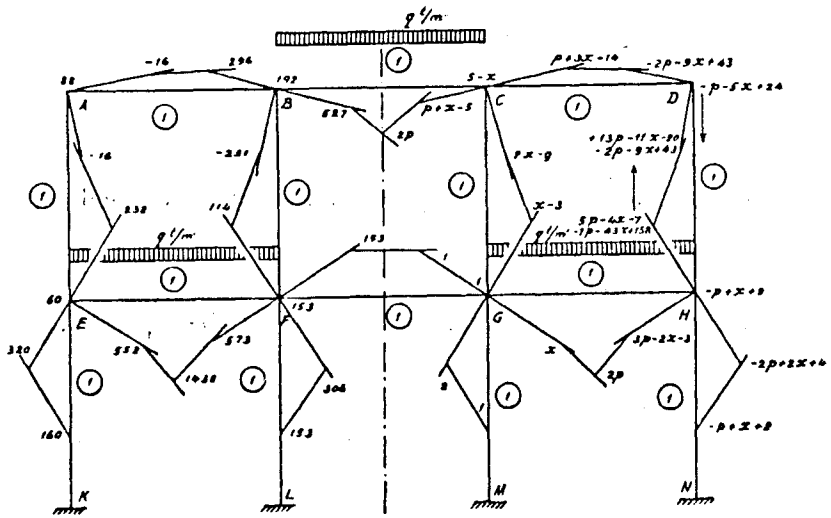
Simpangan-simpangan-horisontal dari titik-titik-simpul C dan E diperoleh sebagai berikut :

$$\delta_c = (x)_b \cdot l = (3\frac{3}{8})_b \cdot l = \frac{k' \cdot 3\frac{3}{8}}{k_b} \cdot \mu \cdot l$$

$$= \frac{1 \cdot 3\frac{3}{8}}{2\,EI/l} \cdot \frac{1}{6} Pl \cdot l = \frac{9\,Pl^3}{32\,EI} ,$$

$$\delta_e = (x+y)_b \cdot l = \frac{1 \cdot 4\frac{7}{8}}{2\,EI/l} \cdot \frac{1}{6} Pl \cdot l = \frac{13\,Pl^3}{32\,EI} .$$

Contoh (11).



Gambar 1.9.11. Kerangka dengan beban-terbagi-rata q t/m pada bentangan-bentangan EF, BC dan GH.

Kerangka, tertera pada Gambar 1.9.11, mempunyai batang-batang dengan kekakuan sama. Karena bentuk-konstruksinya dan pembebanannya keduanya simetrik, cukup untuk meninjau satu

separoh-bagian dari konstruksinya saja, katakanlah bagian-kanannya. Faktor-faktor-lenturan di bentangan-GH dihitung dengan x digunakan sebagai anu-awal. Sesampai di bentangan DH hitungan dapat dilaksanakan baik dari bawah maupun dari atas, yang memberikan syarat :

$$13p - 11x - 20 = -2p - 9x + 43,$$
$$15p - 2x = 63 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

dan
$$5p - 4x - 7 = -7p - 33x + 158,$$
$$12p + 29x = 165 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

Pemecahan x dan p dari persamaan (I) dan (II) menghasilkan:

$$x = \frac{573}{153} \text{ dan } p = \frac{719}{153} ,$$

$$[\,2p \cdot 1\,] = \frac{1}{6} q l^2 ,$$

$$[\,1\,] = \frac{153}{8628} q l^2 ,$$

$$[\frac{1}{153}] = \frac{1}{8628} q l^2 .$$

Faktor-faktor-lenturan, yang sekaligus juga merupakan faktor-momen, dipasang di bagian-kiri dari gambarnya, dinyatakan dalam satuan $-(\frac{1}{153})$. Diperoleh nilai mutlak momen-momen berikut :

$$M^-_{ae} = M^+_{dh} = \frac{16}{8628} q l^2 ,$$

$$M^{+}_{ab} = M^{-}_{dc} = \frac{16}{8628} ql^2 ,$$

$$M^{+}_{ba} = M^{-}_{cd} = \frac{296}{8628} ql^2 ,$$

$$M^{+}_{bf} = M^{-}_{cg} = \frac{231}{8628} ql^2 ,$$

$$M^{-}_{bc} = M^{+}_{cb} = \frac{527}{8628} ql^2 ,$$

$$M^{-}_{fb} = M^{+}_{gc} = \frac{114}{8628} ql^2 ,$$

$$M^{-}_{fg} = M^{+}_{gf} = \frac{153}{8628} ql^2 ,$$

$$M^{-}_{fl} = M^{+}_{gm} = \frac{306}{8628} ql^2 ,$$

$$M^{+}_{fe} = M^{-}_{gh} = \frac{573}{8628} ql^2 ,$$

$$M^{+}_{ea} = M^{-}_{hd} = \frac{232}{8628} ql^2 ,$$

$$M^{-}_{ef} = M^{+}_{hg} = \frac{552}{8628} ql^2 ,$$

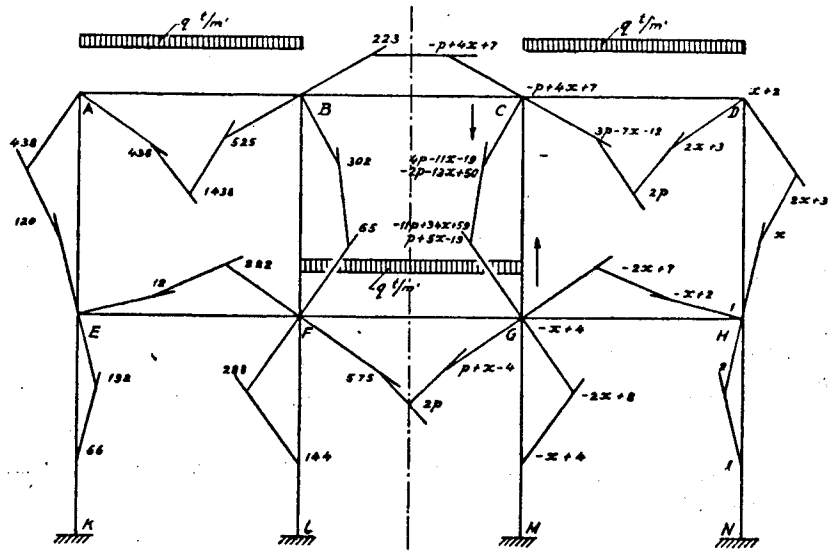
$$M^{+}_{eh} = M^{-}_{hn} = \frac{320}{8628} ql^2 ,$$

$$M^{+}_{ke} = M^{-}_{nh} = \frac{160}{8628} ql^2 ,$$

$$M^{-}_{ef} = M^{+}_{ng} = \frac{153}{8628} ql^2 .$$

Dapat diperhatikan, bahwa pembuatan skets segibanyak-batang-elastik tak perlu tepat. Bila beban-kedua di suatu titik-patah sebenarnya harus dibalik, maka secara otomatik terdapat suatu faktor-lenturan negatif untuk sudut yang bersangkutan.

Contoh (12).



Gambar 1.9.12. Kerangka dengan beban-terbagi-rata q t/m pada bentangan AB, FG dan CD.

Pada Gambar 1.9.12 tertera kerangka dalam contoh sebelumnya, tetapi sekarang dibebani seperti ditunjukkan dalam gambarnya. Dalam bentangan-HD x digunakan sebagai anu-awal. Sesampai di bentangan-CG hitungannya dapat dilaksanakan dari bawah atau dari atas, yang memberikan kedua syarat berikut :

$$4p - 11x - 19 = -2p - 13x + 50,$$
$$6p + 2x = 69 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

dan

$$-11p + 34x + 59 = p + 5x - 19,$$
$$12p - 29x = 78 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

Pemecahan x dan p menghasilkan :

$$x = \frac{20}{11} = \frac{120}{66} \text{ dan } p = \frac{719}{66}$$

$$[\ 2p\ .\ 1\ ] = \frac{1}{6} q l^2 \quad ,$$

$$[\ 1\ ] = \frac{66}{8628} q l^2 \quad ,$$

$$[\ \frac{1}{66}\ ] = \frac{1}{8628} q l^2 \quad .$$

Faktor-faktor-lenturan, yang sekaligus juga merupakan faktor-faktor-momen, dipasang di bagian-kiri dari gambarnya, dinyatakan dalam satuan $-\ (\ \frac{1}{66}\ )$. Diperoleh nilai-mutlak momen-momen berikut :

$$M^{-}_{ab} = M^{+}_{dc} = \frac{438}{8628} q l^2 \quad ,$$

$$M^{+}_{ae} = M^{-}_{dh} = \frac{438}{8628} q l^2 \quad ,$$

$$M^{+}_{ba} = M^{-}_{cd} = \frac{525}{8628} q l^2 \quad ,$$

$$M^{-}_{bc} = M^{+}_{cb} = \frac{223}{8628} q l^2 \quad ,$$

$$M^{-}_{bf} = M^{+}_{cg} = \frac{302}{8628} q l^2 \quad ,$$

$$M^{+}_{ea} = M^{-}_{hd} = \frac{120}{8628} q l^2 \quad ,$$

$$M^{-}_{ek} = M^{+}_{hn} = \frac{132}{8628} q l^2 \quad ,$$

$$M^{+}_{ef} = M^{-}_{hg} = \frac{12}{8628} q l^2 \quad ,$$

$$M^{+}_{fe} = M^{-}_{gh} = \frac{222}{8628} q l^2 \quad ,$$

$$M^{+}_{fb} = M^{-}_{gc} = \frac{65}{8628} q l^2 \quad ,$$

$$M^{-}_{fg} = M^{+}_{gf} = \frac{575}{8628} q l^2 \quad ,$$

$$M^{+}_{fl} = M^{-}_{gm} = \frac{288}{8628} q l^2 \quad ,$$

$$M^{-}_{ke} = M^{+}_{nh} = \frac{66}{8628} q l^2 \quad ,$$

$$M^{+}_{ef} = M^{-}_{mg} = \frac{144}{8628} q l^2 \quad .$$

Catatan.

Pembebanan di Contoh (11) dan Contoh (12) merupakan yang paling tidak menguntungkan. Dengan mengkombinasikan kedua kasus diperoleh momen-momen yang disebabkan oleh beban-hidup atau beban-mati terbagi-rata pada semua balok.

Sebelum diadakan contoh-contoh mengenai rangka-Vierendeel, terlebih dahulu dijabarkan beberapa rumus yang nantinya akan diterapkan. (Bandingkan O B Stevens, De Ingenieur in Ned. Indie, Augustus 1939).

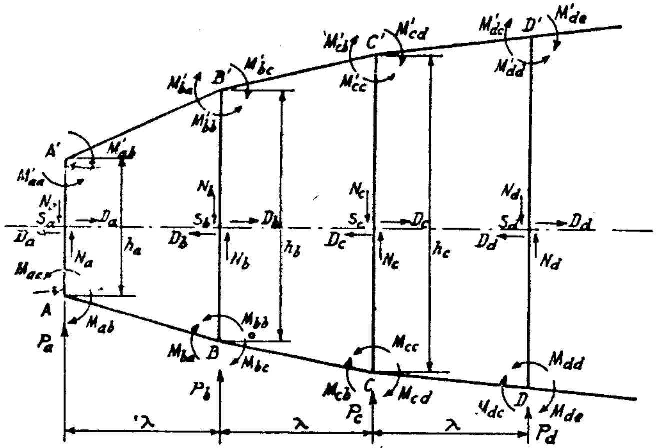
Gambar 1.9.13, melukiskan bagian-kiri suatu rangka-Vierendeel. Momen-momen di batang-batang-atas dan batang-batang bawah dianggap positif (ditunjukkan dalam gambar sebagai anak-anak panah-lengkung searah putaran jarum-jam). Karena momen-momen sekitar

suatu titiksimpul harus berimbangan, momen-momen di batang-batang-tegak negatif.

P_a, P_b, P_c dan seterusnya merupakan gaya-gaya-vertikal (reaksi atau beban) yang bekerja di titik-titik-simpul A, B, C dan seterusnya. Dianggap bertanda positif, bila berarah ke atas.

D_a, D_b, D_c dan seterusnya merupakan gaya-gaya-geser di batang-batang-tegak.

N_a, N_b, N_c dan seterusnya merupakan gaya-gaya-normal di batang-batang-tegak.



Gambar 1.9.13. Rangka-Vierendeel.

S_a, S_b, S_c dan seterusnya merupakan titik-titik dengan nilai-momen sebesar nol atau titik-titik-lentur-balik di batang-batang-tegak. Di titik-titik ini dapat dianggap terdapat sendi. Umumnya letak titik-titik ini tidak di titik-titik-tengah batang-batang-tegak.

h_a, h_b, h_c dan seterusnya merupakan tinggi batang-batang-tegak.

Peninjauan bagian-bawah dan bagian-atas rangkanya dan gaya-gaya dan momen-momen, yang bekerja pada bagian-bagian itu, menghasilkan :

$$M_{ba} = (P_a - N_a) \cdot \lambda - D_a \cdot \overline{S_b B} \,,$$

$$M'_{ba} = N_a \cdot \lambda - D_a \cdot \overline{S_b B'} \,,$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} +$$

$$M_{ba} + M'_{ba} = P_a \cdot \lambda - D_a \cdot h_b$$

atau, karena :

$$D_a = \frac{M_{aa} + M'_{aa}}{h_a},$$

$$M_{ba} + M'_{ba} + \frac{M_{aa} + M'_{aa}}{h_a} \cdot h_b = P_a \cdot \lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (25a)$$

Selanjutnya :

$$M_{cb} = (P_a - N_a) \cdot 2\lambda + (P_b - N_b) \cdot \lambda - (D_a + D_b) \cdot \overline{C\,S_c} \,,$$

$$M_{cb'} = N_a \cdot 2\lambda + N_b \cdot \lambda - (D_a + D_b) \cdot \overline{C'S_c} \,,$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} +$$

$$M_{cb} + M'_{cb} = P_a \cdot 2\lambda + P_b \cdot \lambda - (D_a + D_b)\, h_c$$

dan dengan $D_a = \dfrac{M_{aa} + M'_{aa}}{h_a}$, dan $D_b = \dfrac{M_{bb} + M'_{bb}}{h_b}$,

$$M_{cb} + M'_{cb} + \left(\frac{M_{aa} + M'_{aa}}{h_a} + \frac{M_{bb} + M'_{bb}}{h_a} \right) h_c = P_a \cdot 2\lambda + P_b \cdot \lambda$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25b)$$

Bila kekakuan batang-batang-atas dan batang-batang-bawah sama dalam tiap panil, maka letak titik-titik dengan nilai-momen = 0 (S) di tengah-tengah batang-batang-tegak dan karena itu :

$$M_{ba} = M'_{ba};$$

$$M_{aa} = M'_{aa} = M_a ; M_{bb} = M'_{bb} = M_b ; \text{etc.}$$

Rumus-rumus (25) menjadi :

$$M_{ba} + \frac{M_a}{h_a} . h_b = \frac{P_a \lambda}{2} , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26a)$$

$$M_{cb} + \left(\frac{M_a}{h_a} + \frac{M_b}{h_b} \right) . h_c = \frac{P_a . 2\lambda + P_b \lambda}{2} , \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26b)$$

Bila rangka-Vierendeel dengan batang-batang atas dan batang-batang-bawah sejajar, maka $h_a = h_b = h_c$, dan seterusnya dan rumus-rumus

$$M_{ba} + M_a = \frac{P_a . \lambda}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27a)$$

$$M_{cb} + M_b + M_a = \frac{P_a . 2\lambda + P_b . \lambda}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27b)$$

Rumus-rumus (27) masih dapat diberi bentuk yang lebih mudah. Karena $M_a = M_{ab}$, rumus (27a) menjadi :

$$\boxed{M_{ab} + M_{ba} = \frac{\lambda}{2} . P_a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28a)$$

Rumus (27b) dapat diubah sebagai berikut :

$$M_{cb} + M_b + M_a = \frac{\lambda}{2} (P_a + P_b) + \frac{\lambda}{2} . P_a ,$$

$$M_{cb} + M_b + M_a = \frac{\lambda}{2} (P_a + P_b) + M_{ba} + M_a ,$$

$$M_{cb} + (M_b - M_{ba}) = \frac{\lambda}{2} . (P_a + P_b) ,$$

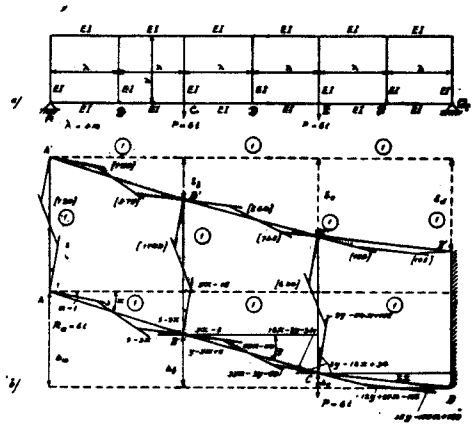
$$\boxed{M_{cb} + M_{bc} = \frac{\lambda}{2} . (P_a + P_b)} \quad \ldots\ldots (28b)$$

Sejalan diperoleh :

$$\boxed{M_{cd} + M_{dc} = \frac{\lambda}{2} (P_a + P_b + P_c)} \quad \ldots\ldots 28c)$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ dan seterusnya.

Contoh (13).



Gambar 1.9.14. Rangka-Vierendeel dengan dua beban-terpusat-vertikal P = 6 ton di C dan E dan segibanyak-batang-elastiknya.

Gambar 1.9.14. menunjukkan suatu rangka-Vierendeel, dengan batang-batang-atas dan batang-batang-bawah sejajar dan batang-batang-tegak dengan kekakuan sama, yang mendukung dua beban-terpusat P = 6 ton di titik-titik-simpul C dan E. Karena bentuk simetri terhadap tengah-bentangan dan garis-bujur liwat tengah-tengah batang-batang-vertikal, maka cukup ditinjau seperempat-bagian saja dari konstruksinya (Gambar 1.9.14.b). Disebabkan pembebanannya titik-simpul B turun sebesar $\delta_b = x \,.\, \lambda$, titik-simpul C turun sebesar $\delta_c = (x + y) \,.\, \lambda$ dan titik-simpul D turun sebesar $\delta_d = (x + y + z)\,\lambda$. Dapat juga dianggap, bahwa batang DD' terjepit sempurna dan, oleh beban P = 6 ton diterapkan di A berarah ke atas, titik-simpul A naik sebesar $\triangle_a = \delta_d = (x + y + z) \,.\, \lambda$, titik-simpul B naik sebesar $\triangle_b = \delta_d - \delta_b = (y + z) \,.\, \lambda$ dan titik-simpul C naik sebesar $\triangle_c = \delta_d - \delta_c = z \,.\, \lambda$.

Segibanyak-batang-elastiknya dilukis di Gambar 1.9.14.b. Garis-batang liwat D horisontal. Nilai faktor – lenturan di A dianggap sebesar 1. Kemudian hitungan dilaksanakan dengan x, y dan z sebagai anu-anu-awal.

Dengan penetapan rumus-rumus (28) atau (27) didapat :

$$[(9 - 3x) \,.\, 1 + 3 \,.\, 1] = \tfrac{1}{2} R_a \,.\, \lambda = 12 \text{ tm},$$

$$[12 - 3x] = \tfrac{1}{2} R_a \,.\, \lambda = 12 \text{ tm}, \qquad \text{(I)}$$

$$[(33x - 3y - 63) \,.\, 1 + (12x - 24) \,.\, 1] = \tfrac{1}{2} R_a \,.\, \lambda ,$$

$$33x - 3y - 63 + 12x - 24 = 12 - 3x ,$$

$$48x - 3y - 99 = 0 , \qquad \text{(II)}$$

$$[(15y - 105x + 199) \,.\, 1 - (-12y + 87x - 165) \,.\, 1] =$$

$$= \tfrac{1}{2} (R_a - P) \,.\, \lambda = 0 ,$$

$$192x - 27y - 364 = 0 . \qquad \text{(III)}$$

Pemecahan x dan y dari persamaan-persamaan (II) dan (III) menghasilkan :

$$x = \frac{527}{240} \quad \text{dan} \quad y = \frac{512}{240} .$$

Pengisian dalam persamaan (I) memberikan :

$$[\frac{433}{80}] = 12 \text{ tm} = \tfrac{1}{2} R_a \,.\, \lambda = \tfrac{1}{2} P \,.\, \lambda ,$$

$$[\ 1\ ] = \frac{960}{433} \text{ tm} = \frac{40}{433} \,.\, P\lambda = \mu ,$$

$$[\frac{1}{240}] = \frac{4}{433} \text{ tm}.$$

Faktor-faktor-lenturan, yang sekaligus juga merupakan faktor-faktor-momen, dicantumkan di bagian-atas gambarnya, dinyatakan dalam satuan $-(\frac{1}{240})$. Kemudian didapat :

$$z = \frac{105 \,.\, 2 + 105 \,.\, 1}{240} \,.\, \frac{1}{3} = \frac{105}{240} .$$

Momen-momen yang diperlukan :

$$M_a = M^{+}_{aa'} = 720 \,.\, \frac{4}{433} = \frac{2880}{433} = 6{,}65 \text{ tm},$$

$$M^{-}_{ba} = 579 \,.\, \frac{4}{433} = \frac{2316}{433} = 5{,}35 \text{ tm},$$

$$M_b = M^{+}_{bb'} = 1143 \,.\, \frac{4}{433} = \frac{4572}{433} = 10{,}55 \text{ tm},$$

$$M^{-}_{bc} = 564 \,.\, \frac{4}{433} = \frac{2256}{433} = 5{,}20 \text{ tm},$$

$$M_{cb}^{-} = 735 \cdot \frac{4}{433} = \frac{2840}{433} = 6{,}78 \text{ tm},$$

$$M_c = M_{cc'}^{+} = 630 \cdot \frac{4}{433} = \frac{2520}{433} = 5{,}81 \text{ tm},$$

$$M_{cd}^{+} = 105 \cdot \frac{4}{433} = \frac{420}{433} = 0{,}97 \text{ tm},$$

$$M_{dc}^{-} = 105 \cdot \frac{4}{433} = \frac{420}{433} = 0{,}97 \text{ tm},$$

$$M_d = M_{dd'} = 0 \text{ tm}.$$

Untuk lendutan dari konstruksinya didapat :

$$\delta_b = (x)_b \cdot \lambda = \frac{k'x'}{k} \cdot \mu \cdot \lambda = \frac{527}{240} \cdot \frac{\lambda}{2\,EI} \cdot \frac{40}{433} \cdot P\lambda \cdot \lambda$$

$$= \frac{527}{5196} \cdot \frac{P\lambda^3}{EI},$$

$$\delta_c = (x + y)_b \cdot \lambda = \frac{1039}{240} \cdot \frac{\lambda}{2EI} \cdot \frac{40}{433} \cdot P\lambda \cdot \lambda$$

$$= \frac{1039}{5196} \cdot \frac{P\lambda^3}{EI},$$

$$\delta_d = (x + y + z)_b \cdot \lambda = \frac{1144}{240} \cdot \frac{\lambda}{2\,EI} \cdot \frac{40}{433} \cdot P\lambda \cdot \lambda$$

$$= \frac{1144}{5196} \cdot \frac{P\lambda^3}{EI}.$$

Setelah dipecahkan soal ini dengan faktor-lenturan, diperoleh hasil-hasil yang tepat (exakt), sedang hanya dua persamaan dengan dua anu yang harus diselesaikan.

Rangka ini telah dianalisa oleh Prof. Ir. Roosseno Suryohadikusumo dalam "De Ingenieur in Ned. Indie" Oktober 1938. Dengan metode kuantitas-pengaruh hasilnya :

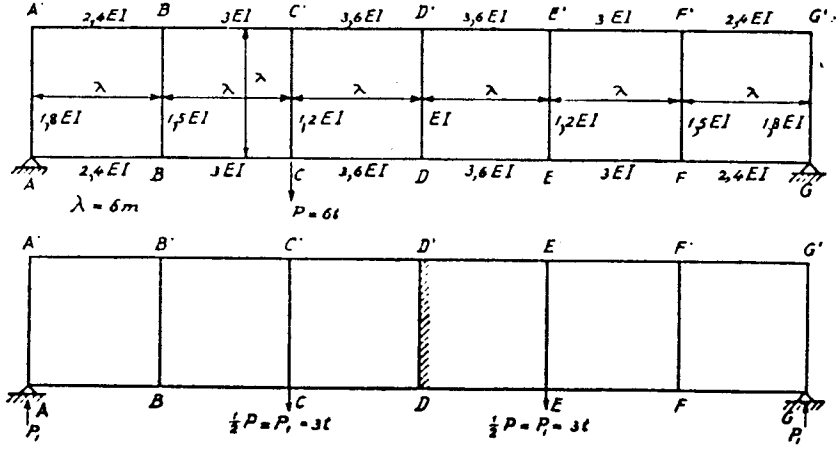
$M_a = 2\,(2{,}1995 + 1{,}1209) = 6{,}6408$ tm,
$M_b = 2\,(3{,}3964 + 1{,}8876) = 10{,}5680$ tm,
$M_c = 2\,(0{,}9720 + 1{,}9385) = 5{,}8210$ tm.

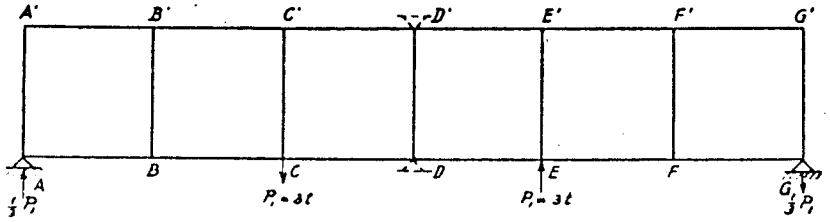
Dengan metode Kriso didapat :

$M_a = 2\,(2{,}1995 + 1{,}1261) = 6{,}6512$ tm,
$M_b = 2\,(3{,}4010 + 1{,}8854) = 10{,}5728$ tm,
$M_c = 2\,(0{,}9680 + 1{,}9360) = 5{,}8080$ tm.

Contoh (14) :

Rangka-Vierendeel, tertera dalam Gambar 1.9.15.a, dikenai satu beban-terpusat saja, yaitu P = 6 ton di C. Pemecahan soal ini dimudahkan dengan memandang pembebanan ini sebagai superposisi dari dua kasus pembebanan berikut ini.





Gambar 1.9.15. a. Rangka-Veirendeel dengan beban-terpusat P = 6 t di C.
b. Beban-beban-terpusat P_1 = 3 t di C dan E.
c. Beban-beban-terpusat P_1 = 3 t di C berarah ke bawah dan P_1 = 3 t di E berarah ke atas.

I. Pembebanan simetri-cermin dengan dua beban-terpusat masing-masing sebesar ½ P di C dan E (Gambar 1.9.15b). Dalam hal ini batang-vertikal DD' dapat dipandang sebagai terjepit sempurna.

II. Pembebanan simetri-kebalikan, yaitu beban-terpusat ½ P di C berarah ke bawah dan beban-terpusat ½ P di E berarah ke atas (Gambar 1.9.15c). Dalam hal ini titik-titik-simpul D dan D' dapat dipandang sebagai didukung oleh sendi-sendi. d

Nilai-nilai-banding-kekakuan dari batang-batang :

$$k'_{cd} : k'_{bc} : k'_{ab} : k'_{aa} : k'_{bb} : k'_{cc} : k'_{dd} =$$

$$\frac{2.\ 3{,}6\ EI}{\lambda} : \frac{2\ .\ 3\ EI}{\lambda} : \frac{2\ .\ 2{,}4\ EI}{\lambda} : \frac{2\ .\ 1{,}8\ EI}{\lambda} :$$

$$\frac{2\ .\ 1{,}5\ EI}{\lambda} : \frac{2\ .\ 1{,}2\ EI}{\lambda} : \frac{2\ .\ EI}{\lambda} =$$

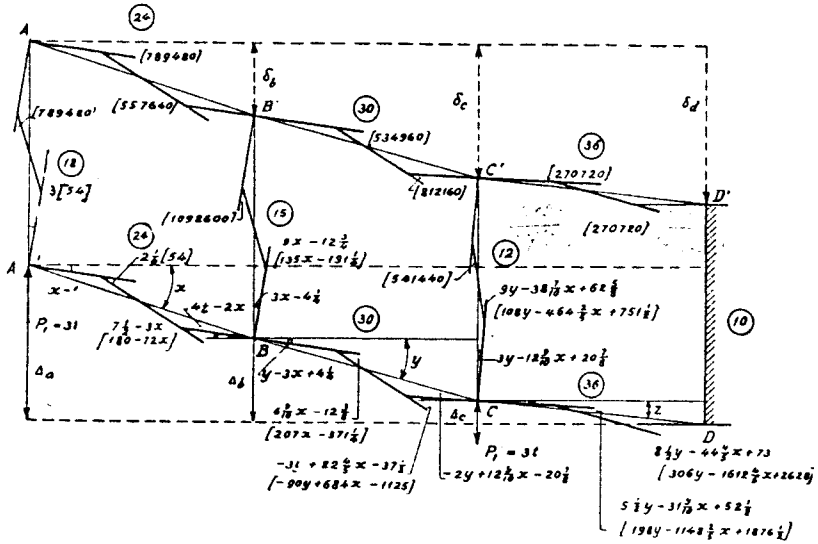
$$= \quad 36 \ : \ 30 \ : \ 24 \ : \ 18 \ : \ 15 \ : \ 12 \ : \ 10.$$

Kasus (I).

Lendutan dari titiksimpul B, C dan D $\delta_b = (x).\lambda$; $\delta_c = (x + y).\lambda$ dan $\delta_d = (x + y + z).\lambda$, atau bila batang DD' dianggap terjepit-sempurna, kenaikan titik-titik-simpul A, B dan C :

$$\Delta_a = \delta_d = (x + y + z).\lambda,$$
$$\Delta_b = \delta_d - \delta_b = (y + z)\lambda,$$
$$\Delta_c = \delta_d - \delta_c = (z)\lambda.$$

Segibanyak-batang-elastiknya dilukis (Gambar 1.9.16) dan faktor-faktor-lenturannya dihitung dengan x, y, dan z sebagai anu-anu-awal.



Gambar 1.9.16. Hasil kasus (I).

Penerapan syarat-syarat menurut persamaan (28) menghasilkan :

$$[\ (180 - 72\ x) + 54\ ] = \frac{P_1\ \lambda}{2}\ ,$$

$$[\,234 - 72x\,) = \frac{P_1\,\lambda}{2} = 9 \text{ tm.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

$$[\,(-90y + 648x - 1125) + (207x - 371\frac{1}{4}\,)\,] = \frac{\lambda}{2}\,(P_1 + 0) = \frac{P_1 . \lambda}{2} \quad ,$$

dengan disamakan dengan (I) didapat :

$$-90y + 684x - 1125 + 207x - 371\frac{1}{4} = 234 - 72x \,,$$

$$963x - 90y - 1730\frac{1}{4} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

$$[\,(306y - 1612\frac{4}{5}\,x + 2628) + (\,198y - 1148\frac{2}{5}\,x + 1876\tfrac{1}{2})\,] =$$

$$\tfrac{1}{2}\lambda\,(P_1 + 0 - P_1) = 0,$$

$$2761\frac{1}{5}\,x - 504y - 4504\tfrac{1}{2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(III)$$

Pemecahan x dan y dari persamaan-persamaan (II) dan (III) menghasilkan :

$$x = \frac{28805}{14620} \quad \text{dan} \quad y = \frac{27144}{14620} \quad .$$

Pengisian dalam persamaan (I) memberikan :

$$[\,\frac{1347120}{14620}\,] = 9 \text{ tm} = \frac{P_1\lambda}{2} = \frac{P\,.\,\lambda}{4} \quad ,$$

$$[\;1\;] = \frac{1462}{14968} \text{ tm} = \frac{731}{269424}\,.\,P\,.\,\lambda = \mu \;,$$

$$[\,\frac{1}{14620}\,] = \frac{1}{149680} \text{ tm} \quad .$$

Faktor-faktor-momen dalam satuan- ($\frac{1}{14620}$) dipasang di bagian-atas dari gambarnya.

z didapat dari :

$$z = \frac{7520\,.\,2 + 7520\,.\,1}{1460}\,.\,\frac{1}{3} = \frac{7520}{14620}\,.$$

Momen-momennya :

$$M^{+}_{aa'} = \frac{789480}{149680} = 5{,}274 \text{ tm},$$

$$M^{-}_{ba} = \frac{557640}{149680} = 3{,}726 \text{ tm},$$

$$M^{+}_{bb'} = \frac{1092600}{149680} = 7{,}300 \text{ tm},$$

$$M^{-}_{bc} = \frac{534960}{149680} = 3{,}574 \text{ tm},$$

$$M^{-}_{cb} = \frac{812160}{149680} = 5{,}426 \text{ tm},$$

$$M^{+}_{cc'} = \frac{541440}{149680} = 3{,}617 \text{ tm},$$

$$M^{-}_{cd} = \frac{270720}{149680} = 1{,}809 \text{ tm},$$

$$M^{-}_{dc} = \frac{270720}{149680} = 1{,}809 \text{ tm},.$$

Lendutan (pindahan-vertikal) dari titik-titik-simpul B, C dan D adalah :

$$\delta_c = (x)_b\,.\,\lambda = \frac{k^1\,.\,x^1\mu}{k}\,.\,\lambda = \frac{10}{2\,EI/\lambda}\,.\,\frac{28805}{14620}\,.\,\frac{731}{269424}\,.P\lambda.\lambda$$

$$= \frac{28805}{1077696}\;\frac{P\lambda^3}{EI} \,,$$

$$\delta_c = (x + y)_b\,.\,\lambda = \frac{10}{2\,EI/\lambda}\,.\,\frac{55949}{14620}\,.\,\frac{731}{269424}\,.\,P\lambda\,.\,\lambda =$$

$$= \frac{55949}{1077696} \quad \frac{P\lambda^3}{EI} \quad ,$$

$$\delta_d = (x + y + z)_b \cdot \lambda = \frac{10}{2\ EI/\lambda} \cdot \frac{63469}{14620} \cdot \frac{731}{269424} \quad P\lambda \cdot \lambda$$

$$= \frac{63469}{1077696} \quad \frac{P\lambda^3}{EI} \quad .$$

atau

$$\Delta_a = \frac{63469}{1077696} \quad \frac{P\lambda^3}{EI} = 0{,}0589 \quad \frac{P\lambda^3}{EI} \quad ,$$

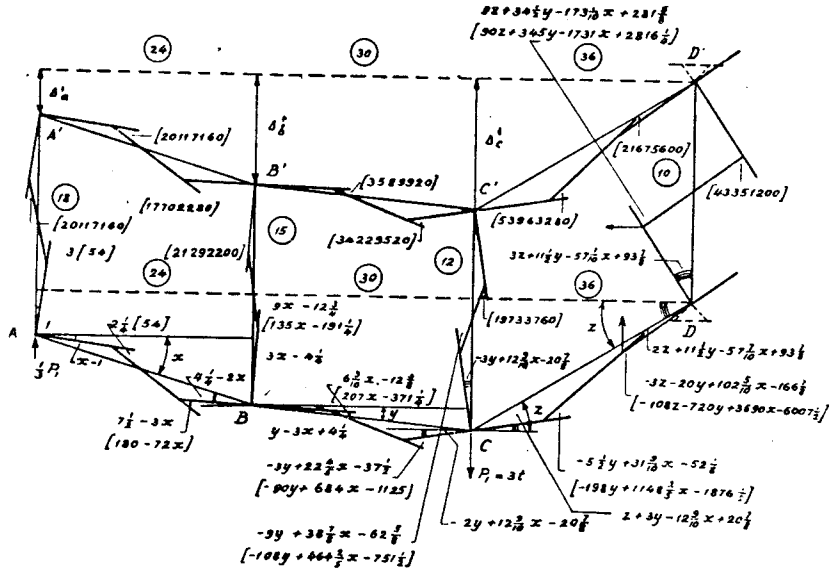
$$\Delta_b = \frac{34664}{1077696} \quad \frac{P\lambda^3}{EI} = 0{,}0322 \quad \frac{P\lambda^3}{EI} \quad ,$$

$$\Delta_c = \frac{7520}{1077696} \quad \frac{P\lambda^3}{EI} = 0{,}0070 \quad \frac{P\lambda^3}{EI} \quad .$$

Kasus (II).

Dalam hal ini dianggap secara mudah bahwa titik-titik-simpul D dan D_1' tidak berpindah, tetapi titik-titik-simpul lainnya mengalami pindahan. Titiksimpul A turun sejauh $\Delta_a' = (z - x - y) \cdot \lambda$, titiksimpul B turun sejauh $\Delta_b' = (z - x)\,\lambda$, dan titiksimpul C turun sejauh $\Delta_c' = z \cdot \lambda$.

Faktor-faktor-lenturan dihitung dengan anggapan faktor-lenturan sebesar 1 di A dan penggunaan x, y dan z sebagai anu-anu-awal.



Gambar 1.9.17 Hasil kasus (II).

Kemudian dengan menerapkan rumus-rumus (28) diperoleh :

$$[\ (180 - 72x) + 54\ ] = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{3} P_1 = 3 \text{ tm}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(I)}$$

$$[\ (-90y + 684x - 1125) + (207x - 371\tfrac{1}{4})\ ] = \frac{\lambda}{2} \cdot (\frac{1}{3} P_1 + 0) = 3 \text{ tm}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(II)}$$

$$[-(-108z - 720y + 3690x - 6007\tfrac{1}{2}) - (-198y + 1148\tfrac{2}{5}x - 1876\tfrac{1}{2})\ ] = \frac{\lambda}{2}\ (\frac{1}{3} P_1 + 0 - P_1) = -6 \text{ tm}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(III)}$$

Syarat keseimbangan momen terhadap titik-simpul D dalam hubungan dengan simetri-kebalikan memberikan :

$$2\,(-108z - 720y + 3690x - 6007\tfrac{1}{2}) = 90z + 345y - 1731x + 2816\tfrac{1}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(IV)}$$

Penyederhanaan persamaan-persamaan menghasilkan :

$$234 - 72x = 3 \text{ tm} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I')$$

Pengisian nilai ini dalam (II) dan (III) memberikan :

$$-40y + 428x - 769 = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II')$$

$$-30z - 255y + 1384x - 2320 = 0 . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III')$$

Persamaan (IV) menjadi :

$$-408z - 2380y + 12148x - 19775 = 0 . \quad \ldots\ldots\ldots (IV')$$

Pemecahan x, y dan z dari persamaan-persamaan (II'), (III') dan (IV') menghasilkan :

$$x = \frac{685485}{372540} \quad , \quad y = \frac{172608}{372540} \quad , \quad z = \frac{1346780}{372540} .$$

Pengisian nilai x dalam persamaan (I') menghasilkan :

$$\left[\frac{37819440}{372540} \right] = 3 \text{ tm} = \frac{1}{6} P_1 \lambda = \frac{1}{12} P\lambda \text{ tm},$$

$$[\,1\,] = \frac{6209}{210108} \text{ tm} = \frac{372540}{453833280} P\lambda = \mu ,$$

$$\left[\frac{1}{372540} \right] = \frac{1}{12606480} \text{ tm}.$$

Faktor-faktor-momen dipasang di bagian-atas dari gambarnya, dinyatakan dalam satuan - $\left(\frac{1}{372540} \right)$.

Momen-momennya :

$$M^{+}_{aa'} = \frac{20117160}{12606480} = 1{,}596 \text{ tm} ,$$

$$M^{-}_{ba} = \frac{17702280}{12606480} = 1{,}404 \text{ tm} ,$$

$$M^{+}_{bb'} = \frac{21292200}{12606480} = 1{,}689 \text{ tm} ,$$

$$M^{-}_{bc} = \frac{3589920}{12606480} = 0{,}285 \text{ tm} ,$$

$$M^{-}_{cb} = \frac{34229520}{12606480} = 2{,}715 \text{ tm} ,$$

$$M^{-}_{cc'} = \frac{19733760}{12606480} = 1{,}565 \text{ tm} ,$$

$$M^{+}_{cd} = \frac{53963280}{12606480} = 4{,}281 \text{ tm} ,$$

$$M^{+}_{dc} = \frac{21675600}{12606480} = 1{,}719 \text{ tm} ,$$

$$M^{-}_{dd'} = \frac{43351290}{12606480} = 3{,}439 \text{ tm} .$$

Pindahan-pindahan-vertikal :

$$\Delta'_a = (z - x - y)_b \cdot \lambda = \frac{k' . (z - x - y)'}{k} \cdot \mu . \lambda =$$

$$= \frac{10}{2\,EI/\lambda} \cdot \frac{489687}{372540} \cdot \frac{372540 \,.\, P\lambda}{453833280} \cdot \lambda$$

$$= \frac{489687}{90766656} \cdot \frac{P\lambda^3}{EI} = 0{,}00540 \frac{P\lambda^3}{EI} .$$

$$\Delta'_b = (z - x)_b \cdot \lambda = \frac{1174172}{90766656} \frac{P\lambda^3}{EI} =$$

$$= 0{,}0130 \frac{P\lambda^3}{EI},$$

$$\Delta'_c = (z)_b \cdot \lambda = \frac{1346780}{90766656} \cdot \frac{P\lambda^3}{EI} = 0{,}0150 \frac{P\lambda^3}{EI}.$$

Momen-momen yang diperlukan didapat secara penjumlahan-aljabar momen-momen dari kedua kasus (tanda-tanda-momen seperti yang telah digunakan). Diperoleh :

$M_{aa'} = + 5{,}274 + 1{,}596 = + 6{,}870$ tm (6,870),

$M_{ab} = - 5{,}274 - 1{,}596 = - 6{,}870$ tm (6,870),

$M_{ba} = - 3{,}726 - 1{,}404 = - 5{,}130$ tm (5,130),

$M_{bb'} = + 7{,}300 + 1{,}689 = + 8{,}989$ tm (8,979),

$M_{bc} = - 3{,}574 - 0{,}285 = - 3{,}859$ tm (3,849),

$M_{cc'} = + 3{,}617 - 1{,}565 = + 2{,}052$ tm (2,060),

$M_{cd} = - 1{,}809 + 4{,}281 = + 2{,}472$ tm (2,472),

$M_{dc} = - 1{,}809 + 1{,}719 = - 0{,}090$ tm (0,091),

$M_{dd'} = + 0{,}000 - 3{,}439 = - 3{,}439$ tm (3,437),

$M_{de} = - 1{,}809 - 1{,}719 = - 3{,}528$ tm (3,528),

$M_{ed} = - 1{,}809 - 4{,}281 = - 6{,}090$ tm (6,091),

$M_{ee'} = + 3{,}617 + 1{,}565 = + 5{,}182$ tm (5,190),

$M_{ef} = - 5{,}426 + 2{,}715 = - 2{,}711$ tm (2,718),

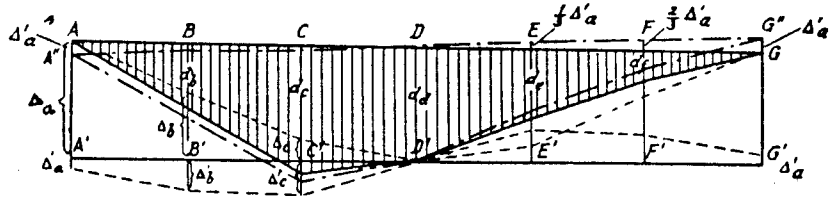
$M_{fe} = - 3{,}574 + 0{,}285 = - 3{,}289$ tm (3,282),

$M_{ff'} = + 7{,}300 - 1{,}689 = + 5{,}611$ tm (5,613),

$M_{fg} = - 3{,}726 + 1{,}404 = - 2{,}322$ tm (2,331),

$M_{gf} = - 5{,}274 + 1{,}596 = - 3{,}678$ tm (3,669),

$M_{gg'} = + 5{,}274 - 1{,}596 = + 3{,}678$ tm (3,669).



Gambar 1.9.18. Gabungan pindahan-vertikal.

Sekarang pindahan-pindahan-vertikal harus digabungkan Pada Gambar 1.9.18. garis-horisontal AG merupakan garis-referensi. Pindahan-pindahan-vertikal Δ_a, Δ_b dan Δ_c dari kasus (I) dipasang ke atas di titik-titik A', G'; B', F'; dan C', E' berturut-turut.

Pindahan-pindahan-vertikal Δ'_a, Δ'_b dan Δ'_c dari kauss (II) dipasang ke bawah di titik-titik A', B' dan C' berturut-turut dan dipasang ke atas di G', F' dan E' berturut-turut.

Pindahan-pindahan-tambahan ditunjukkan dalam gambar nya oleh ordinat-ordinat dari diagram A'' D' G'' A''. Garis A''G'', yaitu garis yang menghubungkan ujung-ujung batang-dasar-bawah, tidak lagi horisontal. Jika diinginkan pengukuran pindahan-pindahan-vertikal terhadap garis-horisontal, yang menghubungkan perletakan-perletakan A dan G, maka rangkanya harus diputar terhadap D sepanjang sudut $\frac{\Delta'_a}{3\lambda}$. Ujung-kanan dari batang datar-bawah turun sejauh Δ'_a dan ujung-kiri naik sejauh Δ'_a. Batang-batang-vertikal juga berputar sebesar sudut $\frac{\Delta'_a}{3\lambda}$, karena itu

titik-titik-simpul dari batang-batang-dasar-atas mengalami pindahan-horisontal : $\Delta_h = \frac{\Delta'_a}{3\lambda} \cdot \lambda = \frac{1}{3}\Delta'_a$ ke arah-kanan terhadap titiksimpul-titiksimpul dari batang-batang-datar-bawah.

Di Gambar 1.9.18 tampak, bahwa :

$$d_a = 0 ,$$

$$d_b = (\Delta_a - \Delta_b + \Delta'_b - \frac{2}{3}\Delta'_a) = 0{,}0361 \quad \frac{P\lambda^3}{EI}$$

$$(0{,}0361) ,$$

$$d_c = (\Delta_a - \Delta_c + \Delta'_c - \frac{1}{3}\Delta'_a) = 0{,}0651 \quad \frac{P\lambda^3}{EI} \quad (0{,}0650) ,$$

$$d_d = \Delta_a = 0{,}0589 \quad \frac{P\lambda^3}{EI} \quad (0{,}0589) ,$$

$$d_e = (\Delta_a - \Delta_c - \Delta'_c + \frac{1}{3}\Delta'_a) = 0{,}0387 \quad \frac{P\lambda^3}{EI} \quad (0{,}0388),$$

$$d_f = (\Delta_a - \Delta_b + \Delta'_b + \frac{2}{3}\Delta'_a) = 0{,}0173 \quad \frac{P\lambda^3}{EI} \quad (0{,}0173) ,$$

$$\Delta_h = \frac{1}{3}\Delta'_a = 0{,}0018 \quad \frac{P\lambda^3}{EI} \quad (0{,}0018) .$$

Rangka-Vierendeel ini juga telah dianalisa oleh Stevens dengan menggunakan metode-distribusi dari Cross di : „De Ingenieur in Ned. Indie", Juli 1939. Hasil-hasilnya dicantumkan dalam kurung di belakang nilai-nilai yang telah diperoleh.

BAB II
KONSTRUKSI DENGAN BATANG - BATANG BERTAMPANG TAK - UNIFORM

§ 1. Kata Hantar.

Balok bertampang tak-uniform, terutama untuk konstruksi beton-tulangan, telah sering diterapkan, karena keuntungan-keuntungan penting yang terlibat dalam penerapannya.

Karena penyesuaian baik dari bahannya terhadap momen-momen dari gaya-gaya geser, maka diperoleh penghematan dari beton dan bajatulangannya. Ini menyebabkan pengurangan beban-mati dan momen-momen oleh beban-mati, yang menyebabkan penghematan lebih lanjut dari bahan-bahan. Jadi dalam dua segi diperoleh penghematan, dibanding dengan belok bertampang-lintang tetap. Dengan penerapan balok-balok bertampang tak-uniform didapat peralihan yang kurang mendadak di titik-titik-simpul dan karena itu jalan yang kurang tidak-menguntungkan dari trajektori-trajektori-tegangan.

Suatu keuntungan yang bukan tidak-penting dari penerapan balok-balok bertampang tak-uniform ialah segi keindahan (estetika) dari konstruksinya.

Berlawanan dengan keuntungan-keuntungan ini adalah kerugian dari biaya lebih tinggi untuk acuannya dan kerja

analisa yang lebih banyak, tetapi kerugian-kerugian ini kurang penting.

§ 2. **Klasifikasi Balok-balok.**

Balok-balok konstruksi dapat berbentuk :

(1) lengkung (sumbu balok melengkung),
(2) lurus (sumbu-balok lurus).

Balok-balok lurus dapat :

(1) bertampang uniform / serbasama (momen-lembam I tetap pada seluruh panjang baloknya),

(2) bertampang tak-uniform / tak-serbasama (momen-lembam berubah sepanjang balok).

Balok bertampang tak-uniform dapat :

(1) sederhana,
(2) majemuk,
(3) sebarang.

Balok-sederhana adalah balok yang momen-lembamnya berubah kontinu sebagai fungsi tertentu. Balok bertampang uniform ($I_X = I_0$ = tetap) merupakan balok-sederhana.

Dari sudut-teori balok bertampang tak-uniform dapat berdasar sebarang fungsi-kontinu ; tetapi dalam praktek dua fungsi umum berikut mencukupi :

$$H_I : I_X = I_0 (1 + cx^n)^3 , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

$$H_{II} : I_X = \frac{I_0}{1 - (1 - v) (\frac{x}{a})^n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

Praktis semua balok, yang digunakan dalam praktek, dapat dilukiskan dengan dua fungsi ini, yang dikelompokkan dalam golongan-utama H_I dan golongan-utama H_{II}.

Untuk balok-balok dari golongan-utama H_I

$I_X = I_0 (1 + cx^n)^3$ dan bila tampang-tampang-lintang berupa empat-persegi-panjang,

$$b_X^{\frac{1}{3}} h_X = b_0^{\frac{1}{3}} h_0 (1 + cx^n) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

dengan x = absis, b_X dan b_0, h_X dan h_0, I_X dan I_0, berturut-turut lebar, tinggi dan momen-lembam dari baloknya di titik-asal,

n = exponen-bentuk,
c = parameter-bentuk.

Untuk nilai-nilai tertentu dari c dan n fungsi-fungsi $b_X = f_1(x)$ dan $h_X = f_2(x)$, yang memenuhi persamaan (31), dapat ditemukan.

Jika misalnya $c = -c_1^2$ dan n = 2 maka lebarnya dapat berubah menurut :

$b_X = b_0 (1 + c_1 x)^3$ dan tingginya menurut $h_X = h_0 (1 - c_1 x)$, atau lebar dapat berubah menurut

$b_X = b_0 (1 - c_1 x)^3$ dan tingginya menurut $h_X = h_0 (1 + c_1 x)$.

Yang lebih penting dalam golongan-utama ini adalah balok-balok dengan lebar tetap $b_X = b_0$ dan tingginya berubah menurut $h_X = h_0 (1 + cx^n)$, yaitu menurut parabol-umum. Untuk n = 1 parabol-umum menjadi garis-lurus dan untuk n = 2 menjadi parabol derajat-kedua. Untuk c = 0 baloknya menjadi bertampang-lintang uniform.

Balok-balok dengan bagian-bagian berubah linier atau sebagai parabol derajat-kedua umum diguankan dalam praktek. Bentuk-fungsi H_I dipilih untuk alasan ini. Sebailknya bentuk fungsi H_{II} dipilih (oleh Ritter pertama kali) karena kemudahan sifat-dapat-integrasi dari fungsi :

$$I_X = \frac{I_0}{1 - (1 - \vartheta)(\frac{x}{a})^n} ,$$

dengan I_X dan I_0 sebagai momen-lembam balok, ϑ (angka yunani nu) suatu parameter bentuk,

n = suatu parameter bentuk,
a = jarak tertentu.

Bila lebar dan tinggi keduanya berubah, maka pada golongan-utama kedua ini :

$$b_x^{\frac{1}{3}} \cdot h_x = \frac{b_0^{\frac{1}{3}} \cdot h_0}{\sqrt[3]{1-(1-\vartheta)(\frac{x}{a})^n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

Bila lebarnya tetap maka tingginya berubah menurut :

$$h_x = \frac{h_0}{\sqrt[3]{1-(1-\vartheta)(\frac{x}{a})^n}} .$$

Balok-balok-majemuk bertampang tak-uniform tersusun oleh bagian-bagian balok-sederhana. Balok-balok sebarang bertampang tak-uniform mempunyai momen-lembam I_x atau tinggi h_x yang berubah secara tak-teratur. Penanganan secara analitik dimungkinkan bila fungsi-I_x-nya (bila perlu untuk bagian-bagian) dapat didekati oleh fungsi-fungsi H_I atau H_{II}. Fungsi H_{II} paling cocok, karena integrasi-integrasi lebih mudah. Bila tinggi-baloknya berubah secara sebarang, tetapi kontinu, maka fungsi H_{II} menjadi dasarnya. Exponen-bentuk n kemudian dipecahkan dari :

$$n \log \frac{x}{a} = \log \frac{I_x - I_0}{(1-\vartheta) I_x} .$$

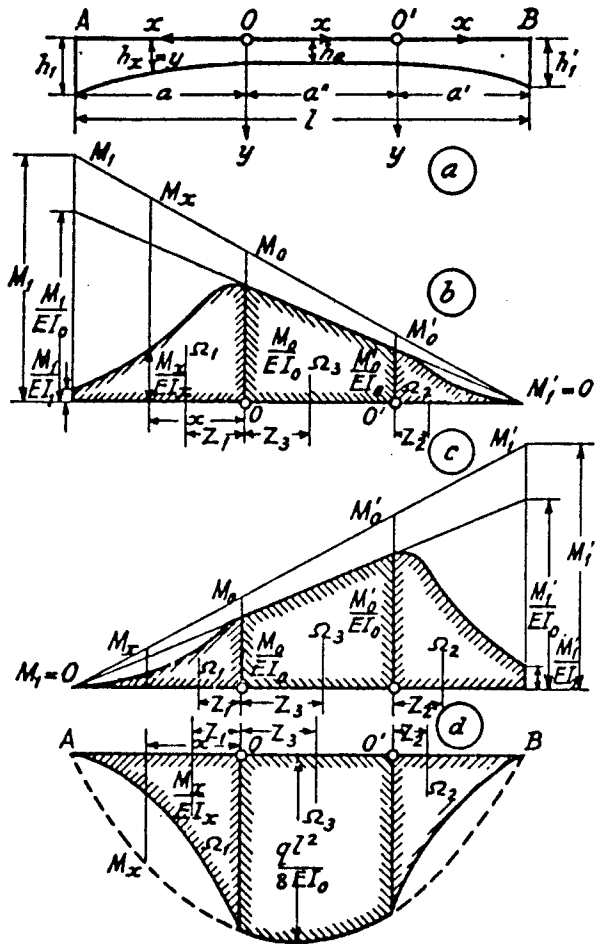
Balok bertampang-lintang tak-uniform lebih lanjut dapat :

(1) simetrik,
(2) tak-simetrik.

§ 3. Konstante-balok dan konstante-beban.

Pada Gambar 2.3.1a terlukis sebuah balok, yang kedua ujung-nya berpinggulan (tepi-bawahnya melengkung ke atas). Baloknya bertampang tak-uniform, majemuk dan tak-simetrik. Untuk balok ini akan ditinjau bagaimana konstante-konstante-balik dan konstante-konstante-beban untuk beban-terpusat dan beban-terbagi-rata harus ditetapkan.

Dalam setiap metode analisa konstruksi-statik-taktertentu menyangkut enam konstante, yang dalam berbagai metode muncul dalam bentuk berbeda, dan yang menyusun dasar-dasar untuk hitung-an-hitungan.



Gambar 2.3.1.
a. Balok bertampang tak-uniform AB dibagi dalam tiga bagian sederhana.
b. Luas diagram-momen-reduksian dan jarak-jarak-sentroid pada M_1.
c. Luas diagram-momen-reduksian dan jarak-jarak-sentroid pada M_1'.
d. Luas diagram-momen-reduksian dan jarak-jarak-sentroid pada q.

Kriterium untuk suatu konstante demikian ialah bahwa ia tidak dapat ditetapkan oleh metodenya sendiri. Empat dari konstante-konstante ini merupakan konstante-konstante-balok, yang hanya tergantung pada bentuk dari baloknya; kedua yang lainnya merupakan konstante-konstante-beban, yang tergantung baik pada bentuk-baloknya maupun pada pembebanannya. Hanya tiga dari keempat konstante-konstante-balok merupakan anu-anu-bebas, yang keempat dapat dihitung dari ketiga yang lain.

Jelaslah bahwa dengan setiap metode-analisa pengetahuan dari lima konstante-bebas perlu dan cukup. Konstante-konstante-balok dalam metode-Clapeyron dari tiga-momen merupakan sudut-sudut-lereng φ_{aa} dan φ_{bba} di ujung-ujung-balok A dan B, yang dihasilkan oleh momen $M_a = 1$ di A, dan sudut-sudutlereng φ_{bb} dan φ_{ab}, yang hasilkan oleh momen $M_b = 1$ di B.

Dengan menamakan momen-momen-reduksian, yang dihasilkan oleh $M_a = 1$ dan $M_b = 1$, O_{a1} dan O_{b1}, maka φ_{aa} dan φ_{ba} merupakan reaksi-reaksi di A dan B disebabkan oleh O_{a1}, dan φ_{bb} dan φ_{ab} merupakan reaksi-reaksi di B dan A disebabkan oleh O_{b1}.

Sudut-sudut ini tidak lain dari besaran-besaran-pengaruh dari Maxwell. Hanya tiga dari konstante-konstante-balok merupakan anu-anu-bebas, karena menurut teorema-Maxwell lendutan-timbal-balik $\varphi_{ab} = \varphi_{ba}$.

Konstante-konstante-beban dalam metode ini adalah sudut-sudut-lereng-ujung α_{ap} dan α_{bp} disebabkan oleh bebannya, yang diterapkan pada baloknya, bila didukung secara sederhana. Sudut-sudut-lereng-ujung ini sama dengan reaksi-reaksi dari dukungan A dan B disebabkan oleh luas momen-reduksian O_p.

Untuk balok-simetrik jumlah dari konstante-konstante-balok yang tidak diketahui dikurangi menjadi dua : $\varphi_{aa} = \varphi_{bb}$ dan $\varphi_{ab} = \varphi_{ba}$.

Jika bebannya juga simetrik, maka jumlah konstante-beban dikurangi menjadi satu $\alpha_{ap} = \alpha_{bp}$.

Jadi untuk beban dengan tampang tetap :

$$\varphi_{aa} = \varphi_{bb} = \frac{l}{3\,EI} \quad \text{dan} \quad \varphi_{ab} = \varphi_{ba} = \frac{l}{6\,EI}$$

dan untuk beban-terbagi-rata pada seluruh panjang dari baloknya :

$$\alpha_{ap} = \alpha_{bp} = \frac{ql^3}{24\,EI}.$$

Dengan bantuan dari enam konstante ini persamaan-persamaan-Clapeyron dapat ditulis. Dalam metode titik-tetap konstante-balok yang sama digunakan dengan metode-Clapeyron. Konstante-konstante-beban dalam metode ini tampak sebagai titik-titik-potong dari garis-garis-vertikal-ujung oleh garis-garis-lintang atau sebagai nilai-nilai-analog.

Konstante-konstante-balok dalam metode distribusi-momen dari Cross adalah kekakuan-kekakuan m_{ab} dan m_{ba} dan faktor-faktor-distribusi C_{ab} dan C_{ba}. Dalam "De Ingenieur in Ned Indie No.12-1939" rumus-rumus berikut, yang memberikan konstante-konstante ini dinyatakan dalam besaran-besaran-pengaruh, telah dijabarkan

$$m_{ab} = \frac{\varphi_{bb}}{\varphi_{aa}\,\varphi_{bb} - \varphi_{ab}^2},$$

$$m_{ba} = \frac{\varphi_{aa}}{\varphi_{aa}\,\varphi_{bb} - \varphi_{ab}^2},$$

$$C_{ab} = \frac{\varphi_{ab}}{\varphi_{bb}},$$

$$C_{ba} = \frac{\varphi_{ab}}{\varphi_{aa}}.$$

Salah satu konstante, yang bebas, jelas dari hubungan :

$$\frac{m_{ab}}{m_{ba}} = \frac{C_{ba}}{C_{ab}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

Konstante-konstante-beban adalah momen-momen-jepit M_a dan M_b. Dengan penggunaan distribusi-momen suatu metode lain harus diterapkan untuk menetapkan konstante-konstante ini.

Mengenai metode faktor-lenturan konstante-konstante-balok adalah nilai-nilai-banding-kekakuan k_{ab} dan k_{ba} dan jarak-jarak-sentroid z_{aa} dari O_{a1} ke A dan z_{bb} dan O_{b1} ke B. Kekakuan diperbataskan dalam metode ini sebagai :

$$k = \frac{M}{O} = \frac{1}{O_1} \ ,$$

dengan M = momen perlawanan,
O = luas diagram-momen-segitiga-reduksian disebabkan oleh M,
O_1 = seperti di atas disebabkan oleh $M = 1$.

Jadi : $$k_{ab} = \frac{M_a}{O_a} = \frac{1}{O_{a1}} \ , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

$$k_{ba} = \frac{M_b}{O_b} = \frac{1}{O_{b1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

Karena $O_{a1} = \varphi_{aa} + \varphi_{ba}$ dan $O_{b1} = \varphi_{bb} + \varphi_{ab}$, konstante-konstante-balok dinyatakan dalam besaran-besaran-pengaruh adalah:

$$k_{ab} = \frac{1}{\varphi_{aa} + \varphi_{ba}} \ , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (38a)$$

$$k_{ba} = \frac{1}{\varphi_{bb} + \varphi_{ab}} \ , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (38b)$$

$$z_{aa} = \frac{\varphi_{ba}}{\varphi_{aa} + \varphi_{ba}} l \ , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (39a)$$

$$z_{bb} = \frac{\varphi_{ab}}{\varphi_{bb} + \varphi_{ab}} l \ . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (39b)$$

Salah satu konstante ini, yang bebas, dinyatakan oleh rumus-rumus:

$$\frac{z_{aa}}{z_{bb}} = \frac{k_{ab}}{k_{ba}} = \frac{O_{b_1}}{O_{a_1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

yang dapat digunakan untuk pemeriksaan kekakuan-kekakuan dan jarak-jarak-sentroid, yang telah dihitung.

Untuk balok-simetrik :

$$k_{ab} = k_{ba} \text{ dan } z_{aa} = z_{bb} \ .$$

Bila baloknya simetrik, maka :

$$k_{ab} = k_{ba} = \frac{M}{\frac{Ml}{2\,EI}} = \frac{2\,EI}{l} = k,$$

$$z_{aa} = z_{bb} = \frac{1}{3} l \ .$$

Konstante-konstante-beban dalam metode ini adalah luas dari diagram-momen reduksian O_p dan jarak-sentroid z_{ap} dari O_p ke A.

§ 4. Penjabaran rumus-rumus untuk menetapkan luas-luas O_{a1}, O_{b1} dan O_p dan jarak-jarak-sentroidnya.

Bila dibandingkan konstante-konstante-balok dan konstante-konstante-beban dari berbagai metodenya, maka jelaslah bahwa yang digunakan dalam metode faktor-lenturan termasuk yang diperbatas-

kan paling sederhana dan yang paling mudah ditetapkan. Dalam metode ini jarak-jarak-sentroid dan luas-luas (atau nilai-nilai kebalikannya) dari diagram-diagram momen-reduksian digunakan langsung sebagai konstante-konstante. Tetapi konstante-konstante dari metode-metode lain harus sedikit-banyak dijabarkan dari konstante-konstante ini. Dengan mengetahui luas-luas O_{a1}, O_{b1} dan O_p dan jarak-jarak-sentroidnya, maka konstante-konstane dari sebarang metode lain dapat dihitung. Untuk menetapkan besaran-besaran tersebut di atas baloknya dibagi dalam tiga bagian-balok sederhana (Gambar 2.3.1a) dan dihitung jarak-jarak-sentroid dan luas-luas dari diagram-diagram-momen-reduksian Ω. Sekarang ditinjau pinggulannya di sebelah-kiri dan luas-luas Ω yang sesuai di Gambar 2.3.1b. dan Gambar 2.3.1d. untuk menjabarkan rumus-rumus umum, yang dapat diterapkan pada keadaan-keadaan serupa.

Dalam Gambar 2.3.1b. momennya berubah menurut :

$$M_X = M_0 + \frac{M_1 - M_0}{a} x ,$$

sehingga luas yang diperlukan diperoleh dari :

$$\Omega_1 = \Omega = \int_0^a \frac{M_X\, dx}{EI_X} ,$$

$$\Omega = \frac{12\, M_0}{E} \int_0^a \frac{dx}{y^3} + \frac{12(M_1 - M_0)}{Ea} \int_0^a \frac{x dx}{y^3} \quad \ldots\ldots (41)$$

dan jarak-sentroid dari :

$$\Omega_1 \cdot z_1 = \Omega \cdot z = \int_0^a \frac{M_X\, x dx}{EI_X} ,$$

$$\Omega \cdot z = \frac{12\, M_0}{E} \int_0^a \frac{x dx}{y^3} + \frac{12(M_1 - M_0)}{Ea} \int_0^a \frac{x^2 dx}{y^3} . \quad (42)$$

Persamaan dari diagram-momen-parabel, yang dihasilkan oleh suatu beban-terbagi-rata q t/m pada seluruh panjang balok, ialah $M_X = \frac{1}{2} qx\ (l - x)$, bila titik pangkalnya di B. Dengan sumbu-sumbu-koordinat seperti yang ditunjukkan dalam Gambar 2.3.1. persamaannya menjadi :

$$M_X = \frac{1}{2} q \left\{ a\ (l - a) - (l - 2a)\, x - x^2 \right\} ,$$

sehingga luas dan jarak-sentroid, yang diperlukan, ditemukan dari:

$$\Omega_{1p} = \Omega_p = \frac{6qa\,(1 - a)}{E} \int_0^a \frac{dx}{y^3} - \frac{6q(1 - 2a)}{E} \int_0^a \frac{x dx}{y^3} - \frac{6q}{E} \int_0^a \frac{x^2 dx}{y^3} \quad \ldots\ldots (43)$$

$$\Omega_{1p} \cdot z_{1p} = \Omega_p \cdot z_p = \frac{6qa(1 - a)}{E} \int_0^a \frac{x dx}{y^3} - \frac{6q(1 - 2a)}{E} \int_0^a \frac{x^2 dx}{y^3} - \frac{6q}{E} \int_0^a \frac{x^3 dx}{y^3} \quad \ldots\ldots (44)$$

Dari rumus-rumus-nya tampak, bahwa tak-tergantung pada tipe balok dengan diagram-diagram-momen lurus atau parabol, ke empat integral berikut harus ditetapkan :

$$i_1 = \int_0^a \frac{dx}{y^3} , \qquad i_3 = \int_0^a \frac{x^2 dx}{y^3} ,$$

$$i_2 = \int_0^a \frac{x dx}{y^3} , \qquad i_4 = \int_0^a \frac{x^3 dx}{y^3} ,$$

Sekarang akan diperiksa menjadi bagaimana integrasi-integrasi-nya dalam berbagai keadaan.

§ 5. Golongan-utama H_I.

$$h_x = y = h_0 (1 + cx^n) .$$

Untuk $x = a$, $h_x = h$, jadi $c = \frac{h_1 - h_0}{h_0 . a^n}$,

$$x = \left(\frac{1}{ch_0}\right)^{\frac{1}{n}} . (y - h_0)^{\frac{1}{n}} ,$$

$$dx = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{ch_0}\right)^{\frac{1}{n}} . (y - h_0)^{\frac{1}{n} - 1} .dy ,$$

$$x\,dx = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{ch_0}\right)^{\frac{2}{n}} . (y - h_0)^{\frac{2}{n} - 1} .dy ,$$

$$x^2 dx = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{ch_0}\right)^{\frac{3}{n}} . (y - h_0)^{\frac{3}{n} - 1} .dy ,$$

$$x^3 dx = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{ch_0}\right)^{\frac{4}{n}} . (y - h_0)^{\frac{4}{n} - 1} .dy .$$

Dengan pengisian nilai-nilai ini dalam nilai-nilai-i, maka, sebelum melaksanakan integrasi-integrasi-nya, pangkat dari $(y - h_0)$ dikembangkan dalam deret-binomial. Untuk keadaan khusus $n = 1$ (garis-lurus) dan $n = 2$ (parabol derajat-kedua), yang penting dalam praktek, integrasi-integrasinya menjadi lebih mudah.

Pinggulan-lurus ($n = 1$).

$$h_x = y = h_0 (1 + cx), \text{ dengan } c = \frac{h_1 - h_0}{h_0 a} ,$$

$$y = h_0 + \frac{h_1 - h_0}{a} x , \quad dx = \frac{a}{h_1 - h_0} . dy ,$$

$$i_1 = \int_0^a \frac{dx}{y^3} = \frac{a}{h_1 - h_0} \int_{h_0}^{h_1} \frac{dy}{y^3} = \frac{a (h_0 + h_1)}{2h_0 . 2h_1^2} ,$$

$$i_2 = \int_0^a \frac{x\,dx}{y^3} = \frac{a^2}{(h_1 - h_0)^2} \int_{h_0}^{h_1} \frac{(y - h_0)\, dy}{y^3} = \frac{a^2}{2h_0 h_1^2} ,$$

$$i_3 = \int_0^a \frac{x^2\,dx}{y^3} = \frac{a^3}{(h_1 - h_0)^3} \int_{h_0}^{h_1} \frac{(y^2 - 2h_0 y + h_0^2)\, dy}{y^3} =$$

$$= \frac{a^2}{(h_1 - h_0)^3} \left\{ \text{bs} \frac{h_1}{h_0} - 1\tfrac{1}{2} + 2\frac{h_0}{h_1} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{h_0}{h_1}\right)^2 \right\} ,$$

$$i_4 = \int_0^a \frac{x^3\,dx}{y^3} = \frac{a^4}{(h_1 - h_0)^4} \int_{h_0}^{h_1} \frac{(y - h_0)^3}{y^3}\, dy =$$

$$= \frac{a^4}{(h_1 - h_0)^3} \left\{ 1 - 3\frac{h_0}{h_1 - h_0} . \text{bs} \frac{h_1}{h_0} + 2\tfrac{1}{2}\frac{h_0}{h_1} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{h_0}{h_1}\right)^2 \right\} .$$

Pengisian nilai-nilai-i ini dalam persamaan-persamaan (41) dan (42) memberikan :

$$\Omega = \frac{6a (M_0 h_1 + M_1 h_0)}{E h_0^2 h_1^2} = \frac{a b_0 (M_0 h_1 + M_1 h_0)}{2 EI_0 h_1^2} , \quad (A_1, 45)$$

$$\Omega z = \frac{6 M_0 a^2}{E h_0 h_1^2} + \frac{12 (M_1 - M_0) a^2}{E (h_1 - h_0)^3} . \left\{ \text{bs} \frac{h_1}{h_0} - 1\tfrac{1}{2} + 2\frac{h_0}{h_1} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{h_0}{h_1}\right)^2 \right\} . \ldots\ldots\ldots (A_2, 46)$$

$$z = \frac{M_0\, a\, h_0}{M_0 h_1 + M_1 h_0} + \frac{2\,(M_1 - M_0)\, a\, h_1^2}{(M_0 h_1 + M_1 h_0)\, h_0} R_1 \quad \ldots\ldots (A_2', 46')$$

maka $$R_1 = \frac{h_0^3}{(h_1 - h_0)^3} \cdot \left\{ bs \frac{h_1}{h_0} - 1\tfrac{1}{2} + 2\frac{h_0}{h_1} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{h_0}{h_1}\right)^2 \right\}$$

Rumus-rumus (A_1) dan (A_2) merupakan rumus-rumus umum, yang dapat diterapkan pada semua bagian-bagian-balok dengan tinggi dan momen keduanya berubah linier. Untuk analisa diagram-momen, yang dihasilkan oleh pindahan-pindahan dari perletakan-perletakan atau dihasilkan oleh beban-beban-terpusat atau dari garis-garis-pengaruh pada konstruksi-konstruksi yang tinggi-baloknya berubah linier, kedua rumus ini mencukupi, karena dengan kedua rumus ini keenam konstante dari semua batang dapat diperoleh.

Pengisian nilai-nilai-i dalam persamaan-persamaan (43) dan (44) memberikan :

$$\Omega p = \frac{qa^2}{4\, EI_0} \left[(l - a) \frac{h_0}{h_1} + a\left(\frac{h_0}{h_1}\right)^2 - 2a\, R_1 \right] \quad \ldots\ldots (A_3, 47)$$

$$\Omega_p \cdot z_p = \frac{qa^3}{2\, EI_0} \cdot \left[\tfrac{1}{2} (l - a)\left(\frac{h_0}{h_1}\right)^2 - (l - 2a)\, R_1 - aR_2 \right], \quad (A_4, 48)$$

dengan $$R_2 = \frac{h_0^3}{(h_1 - h_0)^3} \cdot \left\{ 1 - 3\frac{h_0}{h_1 - h_0} \cdot bs \frac{h_1}{h_0} + 2\tfrac{1}{2}\frac{h_0}{h_1} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{h_0}{h_1}\right)^2 \right\}$$

Rumus-rumusnya menjadi lebih umum, bila diintegrasi antara batas-batas 0 dan sebarang nilai a'. Maka hanya perlu diganti a oleh a' dalam nilai-nilai-i, pengisian berikut dalam (43) dan (44) memberikan :

$$\Omega_{p'} = \frac{q}{4\, EI_0} \left[aa' (l - a) \frac{h_0}{h_1^2} (h_0 + h_1) - a'^2 (l - 2a) \left(\frac{h_0}{h_1}\right)^2 - 2a'^3 R_1 \right] \quad \ldots\ldots (A'_3, 47')$$

$$\Omega_{p'} \cdot z_{p'} = \frac{q}{2\, EI_0} \left[\tfrac{1}{2} aa'^2 (l - a) \left(\frac{h_0}{h_1}\right)^2 - a'^3 (l - 2a) R_1 - a'^4 R_2 \right] \cdot \quad \ldots\ldots (A'_4, 48')$$

Dengan bantuan rumus-rumus-umum (A) kesemua luas Ω dalam Gambar 2.3.1. dan lokasi dari sentroid-sentroidnya dapat ditemukan. Tetapi penerapan pada bagian-tengah-prismatik menghasilkan nilai-nilai tak-tertentu dari bentuk $\frac{0}{0}$, yang harus ditetapkan dengan teorema de l'Hospital.

Tetapi untuk keadaan ini jauh lebih mudah untuk menjabarkan rumus-rumusnya secara langsung.

Didapat :

$$\Omega = \frac{a\,(M_0 + M_0')}{2\, EI_0} \quad \ldots\ldots (B_1, 49)$$

$$z = \frac{a\,(M_0 + 2\, M_0')}{3\,(M_0 + M_0')} \quad \ldots\ldots (B_2, 50)$$

Dengan memilih titikpangkal di A maka persamaan dari diagram-momen-parabel, dengan $a + a' = d$, menjadi :

$M_x = \tfrac{1}{2} qx\,(l - x)$, sehingga :

$$\Omega_p = \frac{q}{2\, EI_0} \int_a^d x\,(l - x)\, dx \quad \text{dan}$$

$$\Omega_p \cdot z_p = \frac{q}{2\, EI_0} \int_a^d x^2\,(l - x)\, dx \ ,$$

$$\Omega_p = \frac{q}{4\,EI_0}\,l(d^2 - a^2) - \frac{q}{6\,EI_0}\,(d^3 - a^3) \ldots\ldots (B_3, 51)$$

$$\Omega_p \cdot z_p = \frac{q}{6\,EI_0}\,l(d^3 - a^3) - \frac{q}{8\,EI_0}\,(d^4 - a^4) \ldots\ldots (B_4, 52)$$

Pinggulan-parabol (n = 2).

$$h_x = y = h_0\,(1 + cx^2), \text{ dengan } c = \frac{h_1 - h_0}{h_0\,a^2},$$

$$i_1 = \int_0^a \frac{dx}{y^3} = \frac{1}{h_0^3} \int_0^a \frac{dx}{(1 + cx^2)^3}$$

Harus dipecahkan integral dari bentuk :

$$i = \int \frac{dx}{(1 + cx^2)^m}$$

Sekarang $dx = \{(1 + cx^2) - cx^2\}\,dx$, jadi :

$$i = \int \frac{dx}{(1 + cx^2)^m} = \int \frac{dx}{(1 + cx^2)^{m-1}} - \int \frac{cx^2}{(1 + cx^2)^m}\,dx$$

Suku terakhir diintegralkan parsiil menurut :

$$\int u.\,dv = uv - \int v.\,du,$$

$u = \frac{1}{2}x$, maka $du = \frac{1}{2}\,dx$

$dv = \frac{2\,cx\,dx}{(1 + cx^2)^m}$, maka $v = \frac{-1}{(m-1)(1 + cx^2)^{m-1}}$;

$$\int \frac{cx^2}{(1 + cx^2)^m}\,.\,dx = \frac{-x}{2\,(m-1)(1 + cx^2)^{m-1}} + \frac{1}{2\,(m-1)} \int \frac{dx}{(1 + cx^2)^{m-1}}, \ldots\ldots (53)$$

sehingga :

$$i = \int \frac{dx}{(1 + cx^2)^m} = \frac{x}{2\,(m-1)(1 + cx^2)^{m-1}} + \frac{2m - 3}{2\,(m-1)} \int \frac{dx}{(1 + cx^2)^{m-1}} \ldots\ldots (54)$$

Dengan $m = 3$ didapat :

$$i = \frac{x}{4(1 + cx^2)^2} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{(1 + cx^2)^2}$$

dan dengan penerapan rumusnya sekali lagi :

$$i = \frac{x}{4(1 + cx^2)^2} + \frac{3x}{8(1 + cx^2)} + \frac{3}{8} \int \frac{dx}{1 + cx^2}$$

Diketahui bahwa : $\int \frac{dx}{1 + cx^2} = \frac{1}{\sqrt{c}}$ bs tg $x\sqrt{c}$

maka :

$$i = \frac{x\,(5 + 3\,cx^2)}{8\,(1 + cx^2)^2} + \frac{3}{8\sqrt{c}}\ \text{bs tg}\ x\sqrt{c}$$

$$i_1 = \frac{1}{h_0^3} \int_0^a \frac{dx}{(1 + cx^2)^3} = \frac{1}{h_0^3} \left\{ \frac{a\,(5 + 3\,ca^2)}{8\,(1 + ca^2)^2} + \frac{3}{8\sqrt{c}}\ \text{bs tg}\ a\sqrt{c} \right\}$$

$$= \frac{1}{h_0^3} \left\{ \frac{ah_0\,(2h_0 + 3h_1)}{8\,h_1^2} + \frac{3}{8}\,a \sqrt{\frac{h_0}{h_1 - h_0}}\ \text{bs tg} \sqrt{\frac{h_1 - h_0}{h_0}} \right. ;$$

$$i_2 = \int_0^a \frac{x\,dx}{y^3} = \frac{a^2}{2(h_1 - h_0)} \qquad \int_{h_0}^{h_1} \frac{dy}{y^3} = \frac{(h_1 + h_0)\,a^2}{4\,h_1^2\,h_0^2} \quad ;$$

$$i_3 = \int_0^a \frac{x^2\,dx}{y^3} = \frac{1}{ch_0^3} \int_0^a \frac{cx^2\,dx}{(1 + cx^2)^3}$$

Dengan penerapan rumus (53) dan (54) diperoleh :

$$i = \int \frac{cx^2\,dx}{(1 + cx^2)^3} = \frac{-x}{4(1 + cx^2)^2} + \tfrac{1}{4} \int \frac{dx}{(1 + cx^2)^2} =$$

$$= \frac{-x}{4(1 + cx^2)^2} + \frac{x}{8(1 + cx^2)} + \frac{1}{8} \int \frac{dx}{1 + cx^2} =$$

$$= \frac{x(cx^2 - 1)}{8(1 + cx^2)^2} + \frac{1}{8\sqrt{c}} \text{ bs tg } x\sqrt{c}, \text{ sehingga :}$$

$$i_3 = \frac{1}{ch_0^3} \left\{ \frac{a(ca^2 - 1)}{8(1 + ca^2)^2} + \frac{1}{8\sqrt{c}} \text{bs tg} \sqrt{\frac{h_1 - h_0}{h_0}} \right\}$$

$$= \frac{a^3\,h_0^2\,(h_1 - 2h_0)}{8h_0^3\,h_1^3\,(h_1 - h_0)} + \frac{a^3}{8\,h_0^3} \left(\frac{h_0}{h_1 - h_0} \right)^{\frac{3}{2}} \text{bs tg} \sqrt{\frac{h_1 - h_0}{h_0}} \quad ;$$

$$i_4 = \int_0^a \frac{x^3\,dx}{y^3} = \frac{a^4}{2(h_1 - h_0)^2} \int_{h_0}^{h_1} \frac{y - h_0}{y^3} dy = \frac{a^4}{4\,h_0\,h_1^2} \quad .$$

Dengan pengisian nilai-nilai-i ini dalam (rumus (41) sampai dengan rumus (44) dihasilkan :
dengan

$$\Omega = \frac{M_0\,a}{8\,EI_0} \left\{ \frac{h_0}{h_1} + 3\sqrt{\frac{h_0}{h_1 - h_0}} \text{ bs tg} \sqrt{\frac{h_1 - h_0}{h_0}} \right\} +$$

$$+ \frac{M_1\,a}{4\,EI_0} \cdot \frac{h_0(h_1 + h_0)}{h_1^2} \quad , \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C_1, 55).$$

$$\Omega z = \frac{M_0\,a^2}{4\,EI_0} \cdot \frac{h_0(h_1 + h_0)}{h_1^2} + \frac{(M_1 - M_0)\,a^2}{8\,EI_0} S_1 \quad , \qquad (C_2, 56).$$

dengan

$$S_1 = \left(\frac{h_0}{h_1} \right)^2 \cdot \frac{h_1 - 2h_0}{h_1 - h_0} + \left(\frac{h_0}{h_1 - h_0} \right)^{\frac{3}{2}} \text{bs tg} \sqrt{\frac{h_1 - h_0}{h_0}} \quad ,$$

$$\Omega_p = \frac{q\,a^2}{16\,EI_0} \left\{ 2a \left(\frac{h_0}{h_1} \right)^2 + (l + a) \frac{h_0}{h_1} + 3(l - a) \cdot \right.$$

$$\left. \sqrt{\frac{h_\sigma}{h_1 - h_0}} \text{ bs tg} \sqrt{\frac{h_1 - h_0}{h_0}} - a\,S_1 \right\} \ldots\ldots (C_3, 57).$$

$$\Omega_p . z_p = \frac{q\,a^3}{8\,EI_0} \left\{ (l - a) \frac{h_0}{h_1} + (l - 2a) \left(\frac{h_0}{h_1} \right)^2 - \right.$$

$$\left. - \tfrac{1}{2} (l - 2a)\,S_1 \right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C_4, 58).$$

§ 6. Golongan-utama H_{II} .

$$I_x = \frac{I_0}{1 - (1 - \vartheta)\left(\frac{x}{a}\right)^n} \quad ,$$

$$\Omega = \frac{M_0}{EI_0} i_1 + \frac{M_1 - M_0}{a\,EI_0} i_2 \quad ,$$

$$\Omega . z = \frac{M_0}{EI_0} i_2 + \frac{M_1 - M_0}{a\,EI_0} i_3 \quad ,$$

$$\Omega_p = \frac{q\,a(l - a)}{2\,EI_0} i_1 - \frac{q(l - 2a)}{2\,EI_0} i_2 - \frac{q}{2\,EI_0} i_3 \quad ,$$

$$\Omega_p . z_p = \frac{q\,a(l - a)}{2\,EI_0} i_2 - \frac{q(l - 2a)}{2\,EI_0} i_3 - \frac{q}{2\,EI_0} i_4 \quad ,$$

dengan: $i_1 = \int_0^a \left\{ 1 - (1-\vartheta)\frac{x^n}{a^n} \right\} dx$,

$$i_2 = \int_0^a \left\{ x - (1-\vartheta)\frac{x^{n+1}}{a^n} \right\} dx ,$$

$$i_3 = \int_0^a \left\{ x^2 - (1-\vartheta)\frac{x^{n+2}}{a^n} \right\} dx ,$$

$$i_4 = \int_0^a \left\{ x^3 - (1-\vartheta)\frac{x^{n+3}}{a^n} \right\} dx ,$$

Integral-integral ini dari bentuk :

$$i = \int_0^a \left\{ x^r - \frac{(1-\vartheta)\,x^m}{a^n} \right\} dx, \text{ oleh integrasi menjadi :}$$

$$i = \frac{a^{r+1}}{r+1} - \frac{(1-\vartheta)\,a^{m-n+1}}{m+1}$$

Ke dalam ini harus diisikan untuk :

untuk i_1 : $r = 0$ dan $m = n$,
untuk i_2 : $r = 1$ dan $m = n+1$,
untuk i_3 : $r = 2$ dan $m = n+2$,
untuk i_4 : $r = 3$ dan $m = n+3$.

Pengisian kemudian dalam rumus (41) sampai dengan rumus (44) memberikan :

$$\Omega = \frac{M_0 \cdot a}{EI_0} \cdot \frac{n+\vartheta}{n+1} + \frac{(M_1 - M_0)\,a}{EI_0} \cdot \frac{n+2\vartheta}{2(n+2)} ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (D_1, 59).$$

$$\Omega \cdot z = \frac{M_0 \cdot a}{EI_0} \cdot \frac{n+2\vartheta}{2(n+2)} + \frac{(M_1 - M_0)\,a^2}{EI_0} \cdot \frac{n+3\vartheta}{3(n+3)} ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (D_2, 60).$$

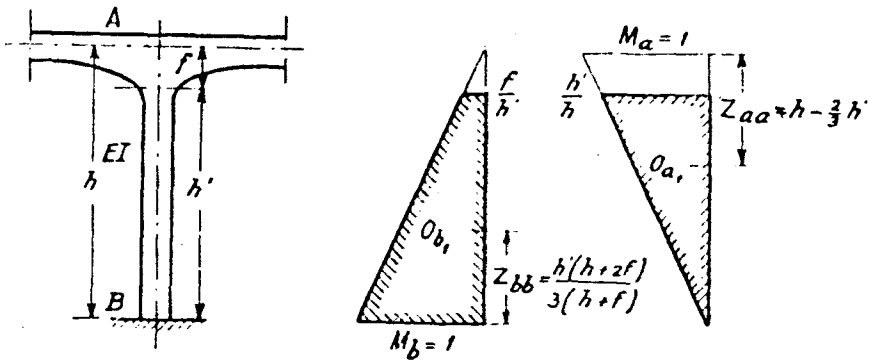
$$\Omega_p = \frac{q\,a^2}{2\,EI_0} \left\{ (l-a)\frac{n+\vartheta}{n+1} - (l-2a)\frac{n+3\vartheta}{2(n+2)} - a\frac{n+3\vartheta}{3(n+3)} \right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (D_3, 61).$$

$$\Omega_p \cdot z_p = \frac{q\,a^3}{2\,EI_0} \left\{ (l-a)\frac{n+2\vartheta}{2(n+2)} - (l-2a)\frac{n+3\vartheta}{3(n+3)} - a\frac{n+4\vartheta}{4(n+4)} \cdot \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (D_4, 62).$$

Dengan bantuan rumus-rumus (A) sampai dengan C luas-luas dan jarak-jarak-sentroid dari diagram-momen-reduksian, yang diperlukan dalam analisa faktor-faktor-lenturan, dapat ditemukan. Jarak-jarak sentroid menyediakan tempat-tempat dari titik-titik-patah segibanyak-batang-elastik; kekakuan-kekakuan merupakan nilai-nilai-kebalikan dari luas-luas O_{a1} dan O_{b1}. Hitungan-hitungan lebih lanjut dengan bantuan segibanyak-batang-elastik yang diskets berlangsung secara serupa seperti pada balok-balok dengan tampang-lintang uniform.

§ 7. Kolom dengan puncaknya kaku-tak-hingga.

Bila dalam suatu kerangka-kontinu balok-baloknya kaku dan kolom-kolom lemas, dianjurkan untuk memandang bagian-atas dari puncak-kolom sebagai kaku-tak-hingga, karena bagian ini tidak dilenturkan. Berapa besar f harus diambil (lihat Gambar 2.7.1) tergantung pada nilai-banding-kekakuan antara balok dan kolom (lihatlah: Strassner, Neuere Methoden, Band I; halaman 85). Luas-luas O_{a1} dan O_{b1} dari kolom-kolom dan jarak-jarak-sentroid z_{aa} dan z_{bb} ditemukan langsung dari gambarnya atau secara lain dengan rumus-rumus (B_1) dan (B_2).



Gambar 2.7.1. Kolom dengan puncaknya kaku tak-hingga, $\bar{z}_{aa}$ dan $\bar{z}_{bb}$.

$$O_{a_1} = \frac{h'^2}{2\,EI\,h}, \text{ sehingga } k_{ab} = \frac{2\,EI\,h}{h'^2}, \quad \ldots\ldots (63)$$

$$O_{b_1} = \frac{(1+\frac{f}{h})\,h'}{2\,EI} = \frac{(h+f)\,h'}{2\,EI\,h}, \text{ sehingga}$$

$$k_{ba} = \frac{2\,EI\,h}{(h+f)\,h'}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (64)$$

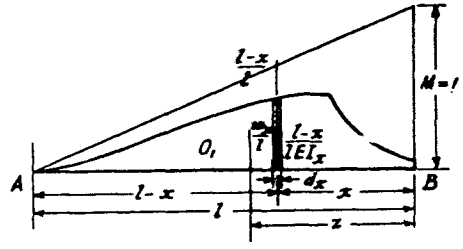
$$z_{aa} = h - \frac{2}{3}h', \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (65)$$

$$z_{bb} = \frac{h'(1+\frac{2f}{h})}{3(1+\frac{f}{h})} = \frac{h'(h+2f)}{3(h+f)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (66)$$

Rumus-rumus yang sama berlaku, jika dengan cara analisa-pendekatan dari lantai-lantai-cendawan puncak-puncak-kolom dianggap kaku-tak-hingga.

Dalam uraian yang lalu hanya balok-balok dan bagian-bagian dari balok dibicarakan, yang momen-lembamnya berubah sebagai fungsi-matematik I_x, atau dapat didekati dengan fungsi demikian. Bila I_x berubah secara rambang sama sekali, maka luas-luas dari diagram-diagram-momen-reduksian dan jarak-jarak-sentroidnya ditetapkan dengan grafik atau tabel. Bila konstante-konstante-baloknya dianalisa, sesuai dengan metode-tabel, maka tabelnya disusun dengan bantuan rumus-rumus berikut ini (lihat Gambar 2.7.2).

$$O_1 = \frac{1}{l}\sum_0^l W_x, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (67)$$



Gambar 2.7.2. Rumus untuk O_1, Z dan W_x

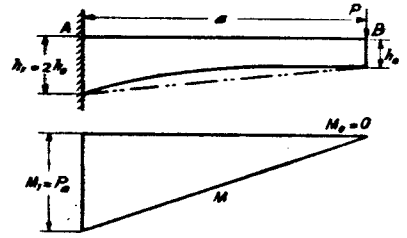
$$z = \frac{\int_0^l W_x \cdot x}{\int_0^l W_x} \quad , \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

dengan

$$W_x = \frac{(l - x)\,dx}{EI_x} \quad .$$

§ 8. Contoh-contoh Sederhana.

Sekarang akan diberikan beberapa penerapan biasa.



Gambar 2.8.1. Balok-konsol.

Contoh 1.

Dalam Gambar 2.8.1. terlukis suatu balok-konsol, yang dikenai beban P.

Lendutan δ diminta dalam hal :

a) tinggi-balok berubah menurut parabol,

b) tinggi-balok berubah menurut garis-lurus.

a). Dengan pengisian dalam rumus (C_2) :

$$h_1 = 2\,h_0 \; ; \; M_0 = 0 \text{ dan } M_1 = P\,a \; ,$$

$$\Omega \,.\, z = \delta = \frac{Pa \,.\, a^2}{8\,EI_0} \text{ bs tg } 1 \; ,$$

$$\delta = \frac{\pi \,.\, a^3 \,.\, P}{32\,EI_0} = 0{,}0982\,\frac{P\,a^3}{EI_0} \; .$$

b). Dengan rumus (A_2) ditemukan :

$$\Omega \,.\, z = \delta = \frac{12 \,.\, Pa\,a^2}{Eh^3}\left\{\ln 2 - 1\tfrac{1}{2} + 1 - \frac{1}{8}\right\} =$$

$$= 0{,}0817\,\frac{P\,a^3}{EI_0} \; .$$

Contoh 2.

Dari balok, yang terlukis di Gambar 2.8.2, diminta kekakuan-kekakuan :

$$k_{ab} = \frac{1}{O_{a_1}} \text{ dan } k_{ba} = \frac{1}{O_{b_1}} \; .$$

dan jarak-jarak-sentroid z_{aa} dan z_{bb} .

Dengan penerapan rumus-rumus (A) pada pinggulan-pinggulan dan rumus-rumus (B) pada bagian-tengah-prismatik didapat, dalam hal $M_a = 1$,

$$\Omega_1 = \frac{4 \,.\, (2 \,.\, \frac{5}{9} + 1)}{2\,EI_0 \,.\, 4} = \frac{19}{18\,EI_0} \; ,$$

$$\Omega_2 = \frac{2 \,.\, \frac{2}{9} \,.\, \frac{3}{2}}{2\,EI_0 \,.\, \frac{9}{4}} = \frac{4}{27\,EI_0} \; ,$$

$$\Omega_3 = \frac{3\,(\frac{2}{9} + \frac{5}{9})}{2\,EI_0} = \frac{7}{6\,EI_0} \; ,$$

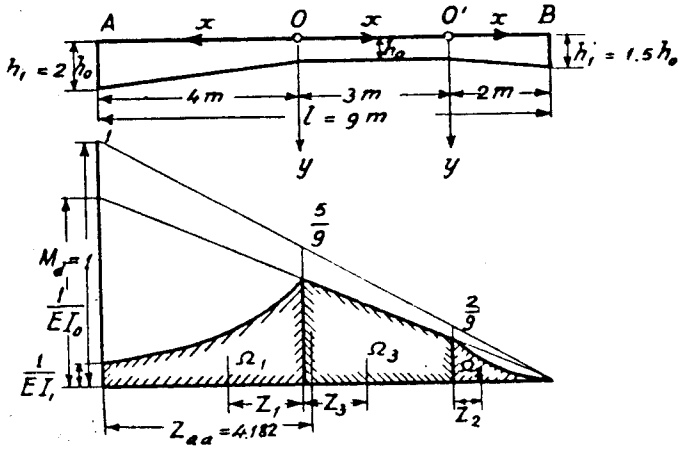
$$O_{a_1} = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = \frac{64}{27\,EI_0}\ , \text{ sehingga}$$

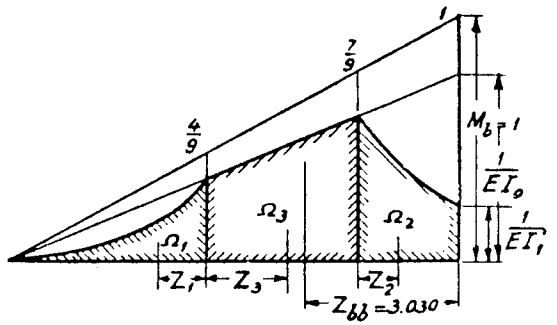
$$k_{ab} = \frac{27\,EI_0}{64}\ ,$$

$$z_1 = \frac{5\,.\,4}{5\,.\,2+9} + \frac{2\,.\,4\,.\,4\,.\,4}{5\,.\,2+9}\left\{\ln 2 - 1\tfrac{1}{2} + 1 - \frac{1}{8}\right\} = 1{,}511\ \text{m}\,,$$

$$z_2 = \frac{2\,.\,2}{2\cdot\frac{3}{2}} + \frac{2\,.\,-2\,.\,2\,.\,\frac{9}{4}}{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{8}}\left\{\ln\frac{3}{2} - 1\tfrac{1}{2} + \frac{4}{3} - \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{4}{9}\right\} = 0{,}536\ \text{m},$$

$$z_3 = \frac{3\,(5+2\,.\,2)}{3(5+2)} = 1\frac{2}{7}\ \text{m} = 1{,}286\ \text{m}.$$





Gambar 2.8.2. Balok AB, luas-luas diagram-momen-reduksian, jarak-jarak-sentroid.

$$O_{a_1}\,.\,z_{aa} = \Omega_1(4 - 1{,}511) + \Omega_2(7 + 0{,}536) + \Omega_3(4 + 1{,}286)$$

maka : $z_{aa} = 4{,}182$ m.

Untuk $M_b = 1$ diperoleh secara sama.

$$\Omega_1 = \frac{4}{9\,EI_0}\ ,$$

$$\Omega_2 = \frac{26}{27\,EI_0}\ ,$$

$$\Omega_3 = \frac{11}{6\,EI_0}\ .$$

Nilai Ω, yang telah dihitung, dapat diperiksa dengan $(\Omega_1)_a + (\Omega_1)_b =$ nilai Ω dalam rumus (A) untuk $M_0 = M_1 = 1$.

Pemeriksaan :

$$(\Omega_1)_a + (\Omega_1)_b = \frac{27}{18\,EI_0} = \frac{4(2+1)}{2\,EI_0\,.\,4}\ ;\ \frac{3}{2\,EI_0} = \frac{3}{2\,EI_0}\ .$$

$$O_{b_1} = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = \frac{175}{54\,EI_0} ,$$

$$k_{ba} = \frac{54\,EI_0}{175} .$$

Untuk jarak-jarak-sentroid didapat :

$$z_1 = 0{,}912 \text{ m} ,$$
$$z_2 = 0{,}8406 = 0{,}841 \text{ m} ,$$
$$z_3 = \frac{18}{11} = 1{,}636 \text{ m} .$$

Nilai-nilai – z dapat diperiksa dengan :

$(\Omega_i \cdot z_i)_a + (\Omega_i \cdot z_i)_b = \{ (\Omega_i)_a + (\Omega_i)_b \}$ x nilai dari z dalam rumus (A'_2) untuk $M_0 = M_1 = 1 =$

$$= \{ (\Omega_i)_a + (\Omega_i)_b \} \frac{a\,h_0}{h_1 + h_0} .$$

Pemeriksaan z_1 :

$$\frac{19}{18} . 1{,}511 + \frac{4}{9} . 0{,}912 = \frac{3}{2} . \frac{4}{3} ,$$

$$2 = 2 .$$

Pemeriksaan z_2 :

$$\frac{4}{27} . 0{,}536 + \frac{26}{27} . 0{,}8406 = \frac{10}{9} . \frac{4}{5} ,$$

$$\frac{8}{9} = \frac{8}{9} .$$

Pemeriksaan z_3 ;

$$\frac{7}{6} . \frac{9}{7} + \frac{11}{6} . \frac{18}{11} = 3 . \frac{3}{2} ,$$

$$4\tfrac{1}{2} = 4\tfrac{1}{2} .$$

$$O_{b_1} . z_{bb} = \Omega_1 (5 + 0{,}912) + \Omega_2 (2 - 0{,}841) + \Omega_3 (5 - 1{,}636),$$

maka : $z_{bb} = 3{,}030$ m.

Pemeriksaan menurut persamaan (40) memberikan :

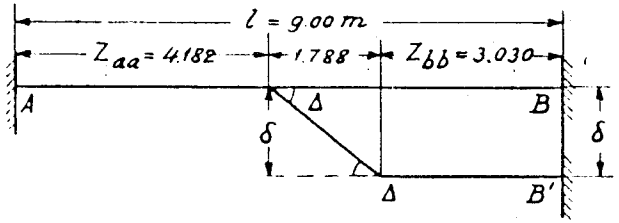
$$\frac{z_{aa}}{z_{bb}} = \frac{O_{b_1}}{O_{a_1}} ,$$

$$\frac{4{,}182}{3{,}030} = \frac{175}{128} ,$$

$$1{,}367 = 1{,}367 .$$

Contoh 3.

Balok yang sama dari contoh tadi dianggap terjepit di kedua-ujungnya A dan B. Ujung-jepit B diberi suatu pindahan δ, tegaklurus pada sumbu-baloknya. Temukan momen-momen ujung-jepit.



Gambar 2.8.3. Segibanyak-batang-elastik.

Konstante-konstante baloknya telah dihitung. Segibanyak-batang-elastiknya diskets di Gambar 2.8.3.

Dari gambarnya tampak, bahwa :

$$\Delta = \frac{\delta}{1{,}788}\ , \text{ jadi}$$

$$M_a = \Delta \,.\, k_{ab} = \frac{\delta}{1{,}788} \,.\, \frac{27\ EI_o}{64} = 0{,}236\ EI_o\ \delta\ ,$$

$$M_b = \Delta \,.\, k_{ba} = \frac{\delta}{1{,}788} \,.\, \frac{54\ EI_o}{175} = 0{,}173\ EI_o\ \delta\ .$$

Jika baloknya prismatik, maka :

$$z_{aa} = z_{bb} = \frac{1}{3}l\ ,$$

$$k_{ab} = k_{ba} = \frac{2\ EI}{l}\ ,$$

$$\Delta = \frac{\delta}{\frac{1}{3}l}\ ,$$

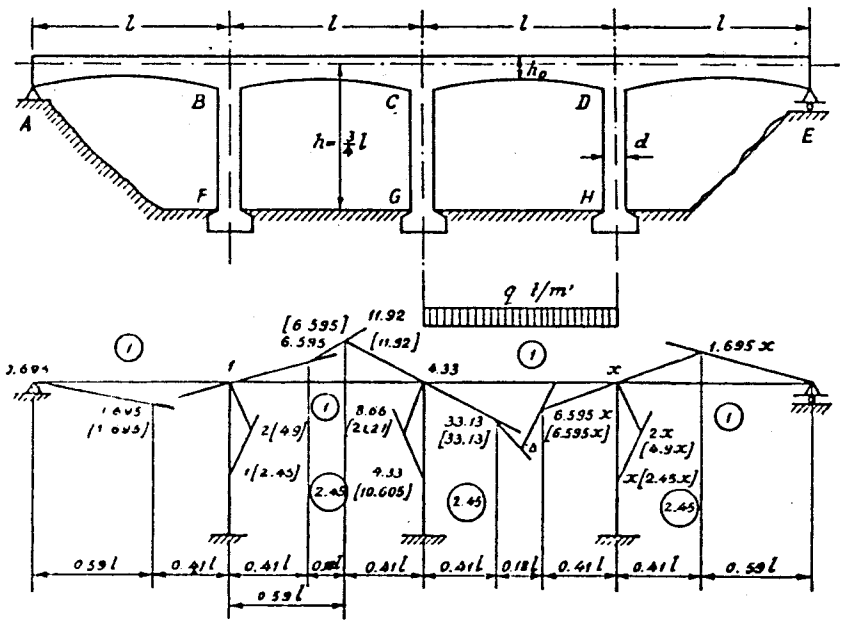
$$M_a = M_b = \frac{3\delta}{l} \,.\, \frac{2\ EI}{l} = \frac{6\ EI\ \delta}{l^2}\ .$$

§ 9. Kerangka-Tegar Multibentangan Dengan Batang-batang Bertampang Tak-Uniform.

Tentang konstruksi, yang terlukis di Gambar 2.9.1, diketahui data sebagai berikut ini.

Pir-pirnya prismatik dengan tebal $d = \frac{3}{2} h_o = 90$ cm.

Balok-balok mempunyai sofit-parabol (parabol derajat-kedua). Puncak-puncak dengan tinggi $h_o = 60$ cm dan pinggulan-pinggulan di atas pir-pir dengan tinggi $h = 2h_o = 120$ cm.

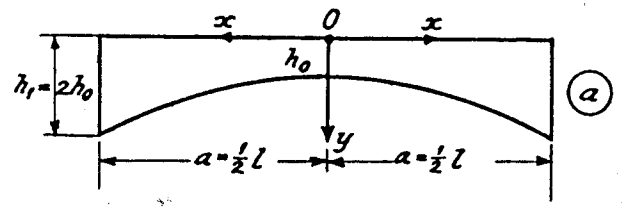


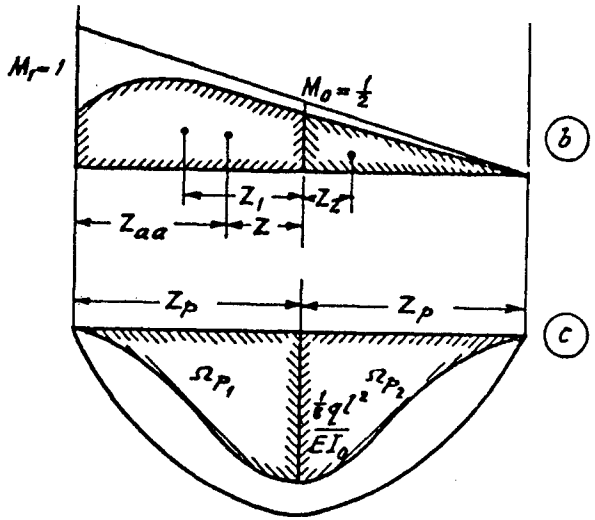
Gambar 2.9.1. Kerangka-tegar multibentangan dan segibanyak-batang-elastiknya.

Bentangan CD memuat beban-terbagi-rata q t/m.

l = panjang bentangan-bentangan.

$h = \frac{3}{4}l$ = tinggi pir-pir.





Gambar 2.9.2.
a. Balok bertampang tak-uniform dengan sofit-parabol.
b. Luas diagram-momen-reduksian dan jarak-jarak-sentroid pada $M_1 = 1$.
c. Luas diagram-momen-reduksian dan jarak-jarak-sentroid paua q.

Diminta menemukan momen-momen dalam konstruksinya

$$\frac{I_0}{I_{pir}} = \frac{\frac{1}{12}\, b\, h_0^3}{\frac{1}{12}\, b\, .\, (1{,}5\, h_0)^3} = \frac{8}{27} \quad ,$$

$$I_{pir} = \frac{27}{8}\, I_0 \, .$$

Pertama-tama harus dicari konstante-konstante-balok dan konstante-konstante-beban. Dengan menerapkan rumus C_1, diperoleh :

$$\Omega_1 = \frac{\frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{2}\, l}{8\, EI_0} \{ \tfrac{1}{2} + 3 \text{ bs tg } 1 \} + \frac{\frac{1}{2}\, l}{4\, EI_0} \cdot \frac{3}{4} \, .$$

Karena bs tg 1 = $\frac{1}{4}\pi$:

$$\Omega_1 = \frac{l}{64\, EI_0} (7 + \frac{3}{2}\pi) \quad ,$$

$$\Omega_2 = \frac{\frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{2}}{8\, EI_0} \{ \tfrac{1}{2} + 3 \text{ bs tg } 1 \} + 0 =$$

$$= \frac{l}{64\, EI_0} (1 + \frac{3}{2}\pi) \quad ,$$

$$0_{a_1} = \Omega_1 + \Omega_2 = \frac{l}{64\, EI_0} (8 + 3\pi) \, ,$$

$$k_{ab} = \frac{1}{0_{a_1}} = \frac{EI_0}{l} \cdot \frac{64}{8 + 3\pi} = 3{,}67\, \frac{EI_0}{l} \, .$$

Karena simetri $O_{b_1} = O_{a_1}$ dan $k_{ba} = k_{ab} = 3{,}67 \frac{E\, I_0}{l}$.

Kekakuan yang sebenarnya dari semua balok adalah sama $= 3{,}67 \frac{EI_0}{l}$.

Kekakuan sebenarnya dari pir-pir sama =

$$\frac{2EI_{pir}}{h} = \frac{2\, E \,.\, \frac{27}{8}\, I_0}{\frac{3}{4}\, l} = 9\, \frac{EI_0}{l}$$

Jika nilai-banding-kekakuan baloknya dianggap = 1, maka nilai banding-kekakuan dari pirnya = $\frac{9}{3{,}67}$ = 2,45. Nilai-nilai-banding kekakuan ini dicantumkan dalam Gambar 2.9.1.b, dalam lingkaran-lingkaran.

Dengan menerapkan rumus C_2 didapat :

$$\Omega_1 z_1 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} l^2}{4 EI_0} \cdot \frac{3}{4} + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} l^2}{8 EI_0} \cdot \frac{1}{4}\pi = (6+\pi) \cdot \frac{l^2}{256 EI_0} ,$$

$$\Omega_2 z_2 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} l^2}{4 EI_0} \cdot \frac{3}{4} + \frac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} l^2}{8 EI_0} \cdot \frac{1}{4}\pi = (6-\pi) \cdot \frac{l^2}{256 EI_0} ,$$

$$z = \frac{\Omega_1 z_1 - \Omega_2 z_2}{\Omega_1 + \Omega_2} = \frac{2\pi l^2}{256 EI_0} \cdot \frac{64\pi}{l(8+3\pi)} =$$

$$= \frac{\pi}{16+6\pi} \cdot l = 0{,}09\, l ,$$

$$z_{aa} = (0{,}5 - 0{,}09)\, l = 0{,}41\, l ,$$

Karena simetri : $z_{bb} = 0{,}41\, l$.

Dengan menerapkan rumus C_3 diperoleh :

$$\Omega_{p_1} = \frac{q \cdot \frac{1}{4} l^2}{16 EI_0} \left(l \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{2} l \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} l \cdot \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{4}\pi \cdot \frac{1}{2} l \right)$$

$$= \frac{ql^2}{64 EI_0} (1 + \tfrac{1}{4}\pi\, l) = \frac{ql^3}{256 EI_0} (4+\pi) ,$$

$$\Omega_{p_2} = \Omega_{p_1} ,$$

$$O_p = \Omega_{p_1} + \Omega_{p_2} = \frac{ql^3}{128 EI_0} \cdot (4+\pi) .$$

Karena simetri, letak sentroid O_p di bentangan-tengah. Segibanyak-batang-elastiknya diskets dalam Gambar 2.9.1.b. Dengan memulai dengan anggapan faktor-lenturan 1 di pir BF hitungan dilaksanakan dalam gambarnya. Di bentangan CD terdapat syarat-geometri :

$$4{,}33 \cdot \tfrac{1}{2} l + 33{,}13 \cdot 0{,}09\, l = x \cdot \tfrac{1}{2} l + 6{,}595\, x \cdot 0{,}09\, l$$

maka $x = 4{,}31$,

$$4{,}33 \cdot 0{,}59\, l + 33{,}13 \cdot 0{,}181 - x \cdot 0{,}41\, l = \Delta\, 0{,}091\, l .$$

Dengan pengisian x dan pemecahan dihasilkan :

$$\Delta = 75{,}01 .$$

$$[\ 75{,}01\ ] = \frac{ql^3}{128 EI_0} (4+\pi) \cdot \frac{EI_0}{l} \cdot \frac{64}{8+3\pi} = \frac{4+\pi}{16+6\pi} ql^2 ,$$

$$[\ 1\ ] = 0{,}00273\, ql^2 = \text{a tm.}$$

Momen-momen yang diminta ialah :

$M_{ba}^{-} = 1{,}695$ a tm,
$M_{bc}^{+} = 6{,}595$ a tm,
$M_{bf}^{-} = 4{,}9$ a tm,
$M_{fb}^{-} = 2{,}45$ a tm,
$M_{cb}^{+} = 11{,}92$ a tm,
$M_{cd}^{-} = 33{,}13$ a tm,
$M_{cg}^{+} = 21{,}21$ a tm,
$M_{gc}^{+} = 10{,}605$ a tm,
$M_{dc}^{+} = 28{,}424$ a tm,

$$M_{\overline{de}} = 7{,}305 \text{ a tm},$$

$$M_{\overline{dh}} = 21{,}119 \text{ a tm},$$

$$M_{\overline{hd}} = 10{,}56 \text{ a tm}.$$

Dapat dicatat, bahwa dari tabel-tabel Strassner (Neuere Methoden, Band I, 1937) luas-luas O_{a1}, O_{b1} dan O_p dan jarak-jarak-sentroidnyanya z_{aa}, z_{bb} dan z_p dapat segera dihitung dan bahwa besaran-besaran ini diberikan langsung dalam tabel-tabel Rupple (Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1927).

Proyek Pembinaan Perpustakaan
Jawa Timur
T. A. 1996/1997